f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 3 + 3\,e^{-\frac{x}{3}}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1-a) Déterminer la fonction dérivée de f.

b) Etudier le sens de variation de f' et étudier la limite de f' en $+\infty$.

c) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0{,}4 \leq \alpha \leq 0{,}5$.

d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

2-a) Etudier la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer le signe de $f(x) - (x^2 - 3)$ et sa limite en $+\infty$.

Interpréter géométriquement ces résultats. On note (P) la courbe d'équation $y = x^2 - 3$.

3-a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution non nulle unique β , appartenant à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$.

Montrer que $0{,}8 \leq \beta \leq 0{,}9$.

c) Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

4/ Tracer les courbes (P) et (C) . Préciser la tangente à (C) au point d'abscisse 0 .