

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n .$$

1/ Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2/ Montrer que, pour tout n entier naturel, on a : $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$.

En déduire que, pour tout k entier naturel, on a : $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, on a : $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b) En déduire que, pour tout n entier naturel, on a : $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.

3/ Déterminer suivant les valeurs de n les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n .

4/ Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.