On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ayant $\mathbb{N}$ pour ensemble de définition et telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \quad \text{et} \quad v_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \text{ pour tout } n \text{ entier naturel} \end{cases}.$$

1/ On note $(w_n)$ la suite ayant $\mathbb{N}$ pour domaine de définition et telle que, pour tout entier naturel :

$$w_n = u_n - v_n .$$

a) Calculer $u_1$ , $v_1$ , $w_0$ et $w_1$ .

b) Montrer que $(w_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

c) Soit $\in \mathbb{N}$ . Exprimer $w_n$ en fonction de $n$ .

d) Préciser la limite de $(w_n)$ .

2/ Etudier le sens de variation de $(u_n)$ et de $(v_n)$ .

3 – a) Justifier que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites adjacentes.

b) Que peut-on en déduire concernant $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ ?

4/ On note $(t_n)$ la suite ayant $\mathbb{N}$ pour ensemble de définition et telle que, pour tout entier naturel $n$ :

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} .$$

a) Démontrer que $(t_n)$ est constante.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ .