Factorisation d'un polynôme par $x - a$:

1/ Soit α un réel et P un polynôme. Démontrer que si, pour tout réel x, $P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$, où Q est un polynôme, alors α est une racine de P.

2/ On se propose d'établir la réciproque.

a) Soit p un entier naturel non nul. Démontrer que, pour tous réels x et y, on a :

$$(x - y)(x^{p-1} + yx^{p-2} + y^2x^{p-3} + \ldots. + y^{p-3}x^2 + y^{p-2}x + y^{p-1}) = x^p - y^p .$$

b) On suppose que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, et que α est une racine de P.

Ecrire l'égalité vérifiée par α.

Calculer $P(x) - P(\alpha)$ et montrer que $x - \alpha$ est un facteur commun dans $P(x) - P(\alpha)$ (On utilisera l'égalité de la question a) avec $p = 1, p = 2 , p = 3 \ldots$).

c) En déduire que $P(x)$ est divisible par $x - \alpha$.

3/ *Application* :

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = 4x^3 - 16x^2 + 13x - 3$.

Calculer $P(3)$.

En déduire une factorisation de $P(x)$, puis résoudre l'équation $P(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.