

1/ Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes : $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$.

2/ Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $z + \frac{1}{z} = 1$,

b) $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$.

3/ Soit le polynôme $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$.

a) Vérifier que $z = 0$ ne peut être solution.

b) Vérifier que $P(z) = 0$ équivaut à $Q(z) = 0$, avec $Q(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$.

c) En déduire, au vu des questions précédentes, les solutions de $P(z) = 0$.