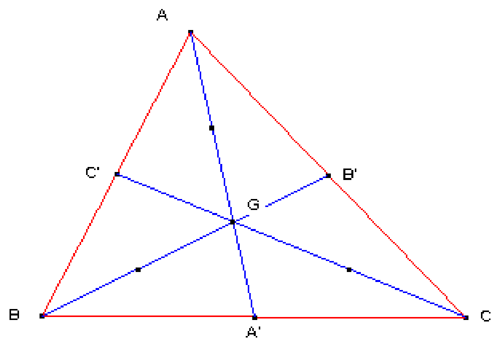
<u>Intersection des 3 Médianes du Triangle – Centre de Gravité G</u> :

Dans un triangle quelconque, les trois médianes, qui relient chaque sommet au milieu du côté opposé, sont concourantes en un même point, noté G , centre de gravité du triangle.

Le centre de gravité G est situé au tiers de chaque médiane, en partant de sa base, donc aux deux-tiers de chaque médiane, en partant de son sommet.



$$GA' = \frac{1}{3}AA' \ , \quad GB' = \frac{1}{3}BB' \ , \quad GC' = \frac{1}{3}CC' \ .$$

Démonstration vectorielle :

Soit G le point d'intersection des médianes AA' et BB' . On doit vérifier que G appartient également à [CC'] .

A' milieu de [BC] $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$, B' milieu de [AC] $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GB'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}$, C' milieu de [AB] $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$.

Pour que G appartienne à [CC'], il suffit de vérifier que $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{GC'}$ sont colinéaires.

Prenons $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})$ comme base du plan vectoriel V_2 .

$\overrightarrow{GA'}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont colinéaires, soit $\overrightarrow{GA'} = k.\overrightarrow{GA}$, $k \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{GB'}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont colinéaires, soit $\overrightarrow{GB'} = k'.\overrightarrow{GB}$, $k' \in \mathbb{R}$.

$2\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2k.\overrightarrow{GA} \Rightarrow \overrightarrow{GC} = 2k.\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$.

$2\overrightarrow{GB'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2k'.\overrightarrow{GB} \Rightarrow \overrightarrow{GC} = 2k'.\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}$

Le vecteur $\overrightarrow{GC}$ a une décomposition unique dans la base $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})$:

$\overrightarrow{GC} = 2k.\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GA} + 2k'.\overrightarrow{GB} \Rightarrow 2k = -1$ et $2k' = -1$, soit $k = k' = -\frac{1}{2}$.

On conclue : $\overrightarrow{GC} = 2k.\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow \mathbf{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}}$,

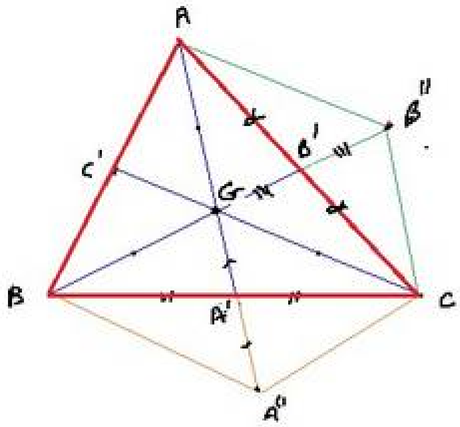
$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, d'où : $\overrightarrow{GC} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = -2\overrightarrow{GC'}$, soit $\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

Les points (C, G, C') sont bien alignés, la 3ème médiane passe également par G , le centre de gravité du triangle.

Formules à retenir :

$\mathbf{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}}$, $\mathbf{2\overrightarrow{GA'} = -\overrightarrow{GA}}$, $\mathbf{2\overrightarrow{GB'} = -\overrightarrow{GB}}$, $\mathbf{2\overrightarrow{GC'} = -\overrightarrow{GC}}$.

Démonstration géométrique :



Soit G le point d'intersection des médianes AA' et BB' . On doit vérifier que G appartient également à [CC'] .

- Soit A" le symétrique de G par rapport à A' , milieu de [BC] , donc A' est aussi milieu de [GA"] .

Le quadrilatère GBA"C ayant ses diagonales qui ont un même milieu A' , est un parallélogramme.

Ses côtés opposés BA" et GC sont donc à la fois parallèles et égaux.

- Soit B" le symétrique de G par rapport à B' , milieu de [AC] , donc B' est aussi milieu de [GB"] .

Le quadrilatère GAB"C ayant ses diagonales qui ont un même milieu B' , est un parallélogramme.

Ses côtés opposés AB" et GC sont donc à la fois parallèles et égaux.

De ces deux affirmation, on déduit que BA" et AB" sont à la fois parallèles et égaux, donc que le quadrilatère ABA"B" est un parallèlogramme, dont les diagonales AA" et BB" ont pour même milieu le point G , leur point d'intersection.

D'où : AG = GA" , alors qu'on savait déjà que GA" = 2GA' , soit AG = 2GA' .

Le point G est bien aux deux-tiers de la médiane AA' , en partant du sommet A .

Le raisonnement est identique avec BG = GB" , alors que GB" = 2GB' , soit BG = 2GB' .

Le point G est bien aux deux-tiers de la médiane BB' , en partant du sommet B .

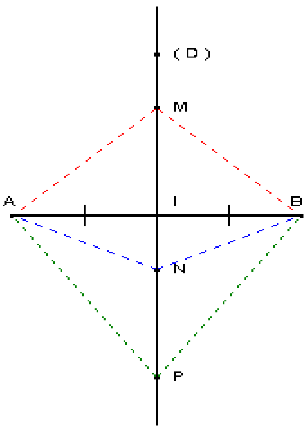
Enfin : G étant le milieu de AA" , et C' le milieu de AB , le théorème des milieux permet d'affirmer que dans le triangle ABA" , le segment des milieux, GC', est parallèle et égal à la moitié du côté BA" , lui-même égal à GC dans le parallélogramme GBA"C .

On déduit que GC' est parallèle à GC, donc que les points (C, G, C') sont alignés sur la 3$^{\text{ème}}$ médiane, et que CG = 2GC' .

Le point G est bien aux deux-tiers de la médiane CC' , en partant du sommet C .

<u>Intersection des 3 Médiatrices du Triangle – Centre du Cercle Circonscrit au Triangle (passant par les 3 sommets)</u> :

La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à ce segment menée en son milieu

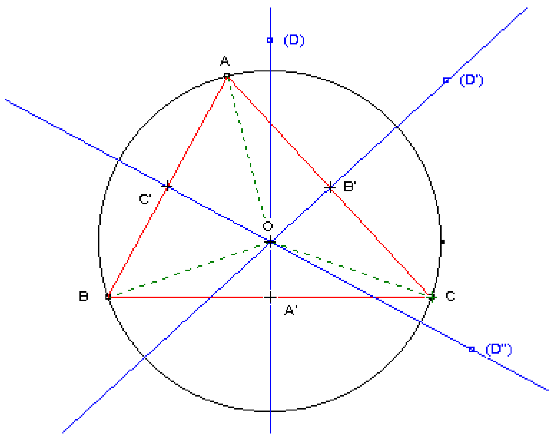


La notion de *médiatrice* n'impose pas la présence d'un triangle, un segment suffit.

Pour qu'un point M soit sur la médiatrice (D) d'un segment $[AB]$, il faut et il suffit qu'il soit équidistant des extrémités A et B de ce segment : $M \in (D) \Leftrightarrow MA = MB$

Médiatrices des côtés d'un triangle

Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un même point O, centre du *Cercle Circonscrit* au triangle (étant équidistant des trois sommets)



Démonstration géométrique :

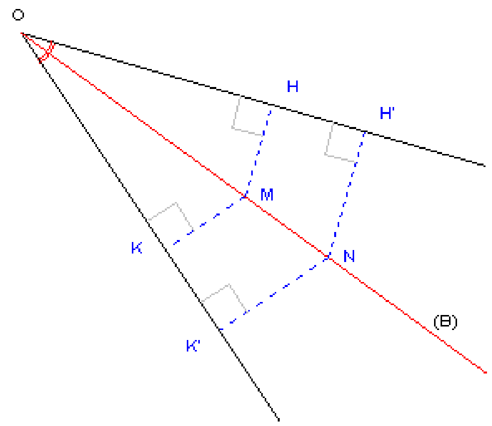
Soit O l'intersection de D et D', médiatrices respectives des côtés BC et AC.

Montrons que O appartient également à la médiatrice du côté AB :

$$\begin{cases} O \in D \Leftrightarrow OB = OC \\ O \in D' \Leftrightarrow OC = OA \end{cases}$$, d'où OA = OB , ce qui prouve que O appartient à la 3ème médiatrice, D''.

<u>Intersection des 3 Bissectrices du Triangle – Centre du Cercle Inscrit dans le Triangle (tangent aux 3 côtés)</u> :

La bissectrice d'un angle est la droite issue du sommet, qui divise l'angle en deux secteurs angulaires égaux

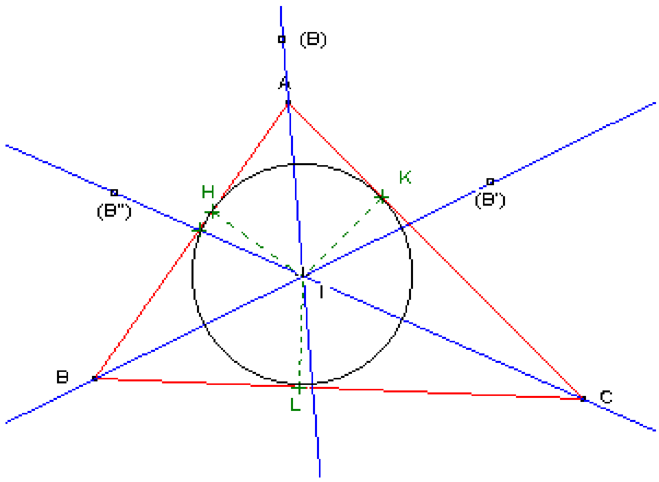


La notion de *bissectrice* n'impose pas la présence d'un triangle, un angle suffit.

Pour qu'un point M soit sur la bissectrice (B) d'un angle, il faut et il suffit qu'il soit équidistant des côtés de l'angle : $M \in (B) \Leftrightarrow MH = MK$

Bissectrices des angles d'un triangle

Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes en un même point I , centre du *Cercle Inscrit* dans le triangle (étant équidistant des trois cotés du triangle)



Démonstration géométrique :

Soit I l'intersection de D et D', les bissectrices respectives des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$.

Soit H, K, L les projetés orthogonaux de I sur les côtés du triangle (intersections à l'angle droit)

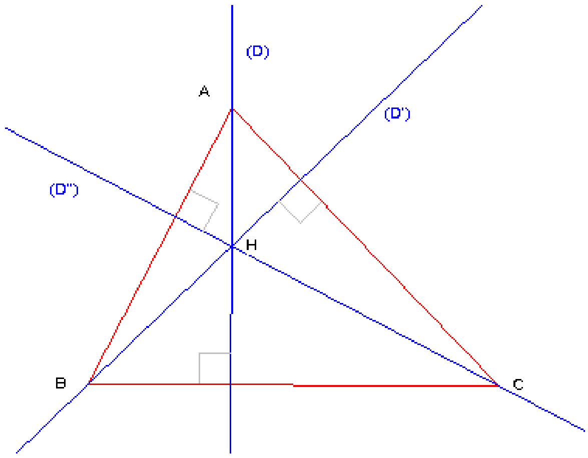
Montrons que I appartient également à la bissectrice D'' de l'angle $\widehat{ACB}$:

$\begin{cases} I \in D \Leftrightarrow IH = IK \\ I \in D' \Leftrightarrow IH = IL \end{cases}$, d'où IK = IL , ce qui prouve que I appartient à la 3$^{\text{ème}}$ bissectrice, D'' .

<u>Intersection des 3 Hauteurs du Triangle – Orthocentre H</u> :

On appelle hauteur d'un triangle toute droite issue d'un sommet et perpendiculaire au côté opposé

Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un même point *H*, *Orthocentre* du triangle



Démonstration vectorielle (produit scalaire) :

Soit H le point d'intersection des hauteurs *D* et *D'* respectivement issues des sommets A et B du triangle.

Montrons que H appartient également à la hauteur *D″* issue du sommet C .

Il suffit de vérifier que $CH \perp AB$, soit $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$ (produit scalaire $aa' + bb' = 0$).

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$, donc $\overrightarrow{CH}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{0} = 0$.

On distribue le produit scalaire sur la somme de vecteurs :

$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA} = 0$,

Or, $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$, avec $AH \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$.

On déduit $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$.

De même : $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH}).\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}$, avec $BH \perp CA \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0$.

On déduit $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$.

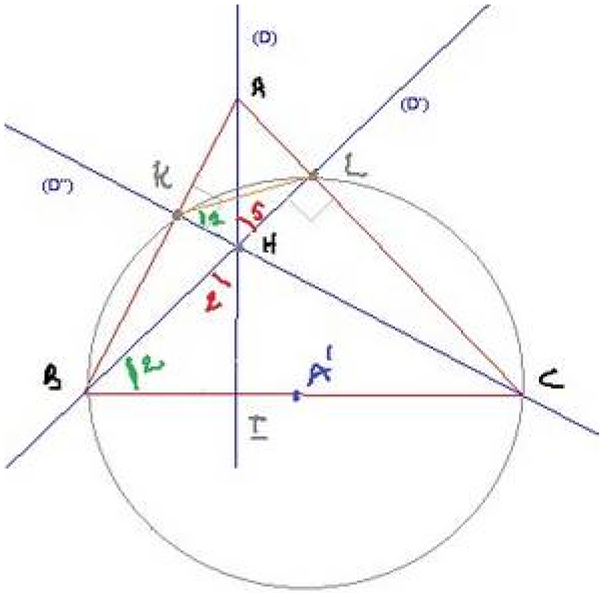
D'où : $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, soit $CH \perp AB$.

L'orthocentre H est bien situé sur la $3^{ème}$ hauteur *D″* .

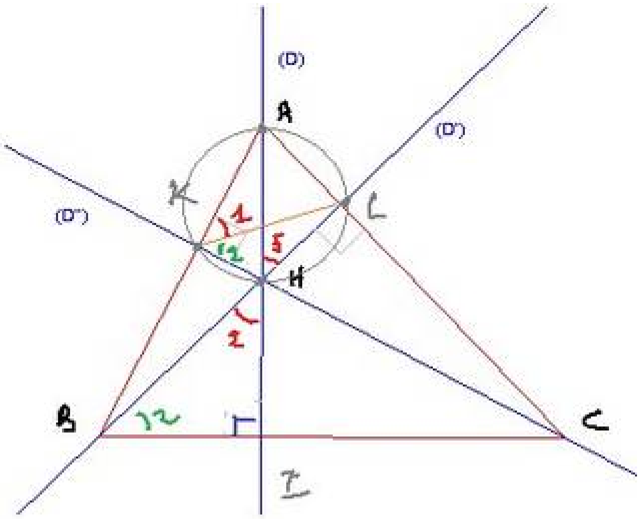
Démonstration géométrique :

Les triangles BKC et BLC sont respectivement rectangles en K et L , donc inscrits dans un ½ cercle, de diamètre BC.

Les angles inscrits $\widehat{B_2} = \widehat{LBC}$ et $\widehat{K_2} = \widehat{LKC}$ sont égaux, car ils interceptent le même arc de cercle $\overset{\frown}{LC}$.



Les angles $\widehat{H_2} = \widehat{BHI}$ et $\widehat{H_5} = \widehat{AHL}$ sont également égaux, car de côtés opposés par le sommet H, donc alignés.



De même :

Les triangles AKH et ALH sont respectivement rectangles en K et L , donc inscrits dans un ½ cercle, de diamètre AH.

Les angles inscrits $\widehat{H_5} = \widehat{AHL}$ et $\widehat{K_1} = \widehat{AKL}$ sont égaux, car ils interceptent le même arc de cercle $\overset{\frown}{AL}$.

Donc : $\widehat{B_2} + \widehat{H_2} = \widehat{K_2} + \widehat{H_5} = \widehat{K_2} + \widehat{K_1} = \widehat{AKH} = 90°$.

Dans le triangle BHI , $\widehat{B_2} + \widehat{H_2} = 90° \Rightarrow \widehat{BIH} = 90°$ (somme des 3 angles d'un triangle = 180°).

Donc, la 3ème hauteur AI est bien perpendiculaire en I au côté BC.

Les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en H , orthocentre du triangle.