Intervalle de Fluctuation - Echantillonnage :

Un phénomène présente une probabilité p dans une population entière.

Un *échantillon* de n éléments est considéré comme conforme à la population, au seuil de 1 - α = 0,95, si la *fréquence observée* du phénomène dans l'échantillon est f_{obs} , appartient à l'intervalle de fluctuation $I.F.$,

$$f_{obs} \in I.F. = [p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]\ .$$

Intervalle de Confiance - Estimation :

A partir d'un échantillon de taille n , pour lequel la *fréquence observée* d'un phénomène est f_{obs} , on estime que la probabilité p de ce phénomène dans la population totale, au seuil de 1 - α = 0,95 , appartient à l'intervalle de confiance $I.C.$,

$$p \in I.C. = [f_{obs} - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f_{obs} + \frac{1}{\sqrt{n}}]\ .$$

Remarques **:**

Les deux formules sont utilisables, tant en situation d'échantillonnage que d'estimation.

Fluctuation : $f_{obs} \in I.F. = [p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$ ou $f_{obs} \in I.F. = [p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$.

Estimation : $p \in I.C. = [f_{obs} - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ f_{obs} - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$ ou $p \in I.C. = [f_{obs} - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f_{obs} + \frac{1}{\sqrt{n}}]$.

Comme nous allons le montrer, la seule différence, au seuil de 95%, est que la 1ère formule est plus précise, son intervalle étant plus étroit, que la seconde, qui est par contre plus simple à manipuler, et plus pratique lorsque l'on cherche l'étendue nécessaire d'un intervalle de confiance.

Pour la 1ère formule, l'étendue de l'intervalle est $L_1 = 2 \times 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$,

Pour la 2ème formule, l'étendue de l'intervalle est $L_2 = 2 \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Vérifions que $L_1 < L_2$, quels que soient n et p :

$L_2 - L_1 = \frac{2}{\sqrt{n}}(1 - 1{,}96\sqrt{p(1-p)})$, qui est du signe de $A = 1 - 1{,}96\sqrt{p(1-p)}$.

$A > 0 \Leftrightarrow \sqrt{p(1-p)} < \frac{1}{1{,}96} \Leftrightarrow p(1-p) < \frac{1}{(1{,}96)^2} \Leftrightarrow p^2 - p + \frac{1}{(1{,}96)^2} > 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - \frac{4}{(1{,}96)^2} < 0$, donc le polynôme est partout du signe de $a = +1$, pour tout p réel.

On a bien montré que $L_2 - L_1 > 0$, soit $L_2 > L_1$.