Espaces Vectoriels Euclidiens :

Un espace vectoriel est dit *euclidien* dès qu'on lui associe la notion de *norme* et de *produit scalaire* , calculés dans une base B fixée.

$$u = ai + bj \text{ et } v = a'i + b'j \text{ dans la base } B(i\,;j) \Rightarrow \begin{cases} u.v = aa' + bb' \text{ (produit scalaire de deux vecteurs)} \\ \|u\| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{u.u} \text{ (norme du vecteur)} \end{cases}$$

La *norme* est une notion de distance (longueur) $\|u\|$,

Le produit scalaire est une notion de cosinus d'un angle : $\cos(u\,;v) = \dfrac{u.v}{\|u\|\times\|v\|}$,

Le déterminant est une notion de sinus d'un angle : $\sin(u\,;v) = \dfrac{\det(u\,;v)}{\|u\|\times\|v\|}$.

Avec les vecteurs de base $(i\,;j)$, sachant $i = 1.i + 0.j$ et $j = 0.i + 1.j$, soit $i_B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $j_B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, on obtient :

$\|i\| = \|j\| = \sqrt{1^2+0^2} = \sqrt{0^2+1^2} = 1$. *Les vecteurs de base sont de longueur* 1 ,

$\cos(i\,;j) = \dfrac{1\times0+0\times1}{1\times1} = 0$ et $\sin(i\,;j) = \dfrac{1\times1 - 0\times0}{1\times1} = 0$, soit $(i\,;j) = +\text{pi} = 0$, soit $(i\,;j) = +\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

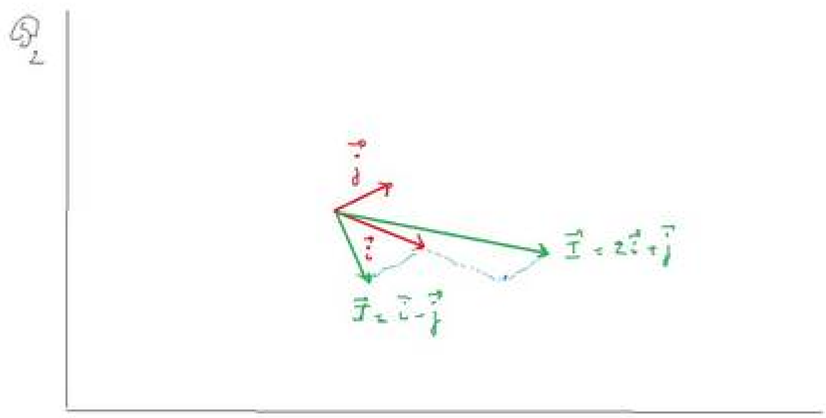
Conséquence graphique :

Si on dessine les vecteurs $(i\,;j)$ pris en référence dans la base B (on parle d'une base *canonique*) le plan vectoriel euclidien doit présenter ces vecteurs comme étant de longueur 1 , et perpendiculaires, dans le sens croissant.

On dit alors que $B(i\,;j)$ est une ***base orthonormée directe*** (ortho = perpendiculaire $i.j = 0$, normée = longueur 1 , positive $(i\,;j) = +\dfrac{\pi}{2}$ ($\det(i\,;j) = +1$).

Exemple :

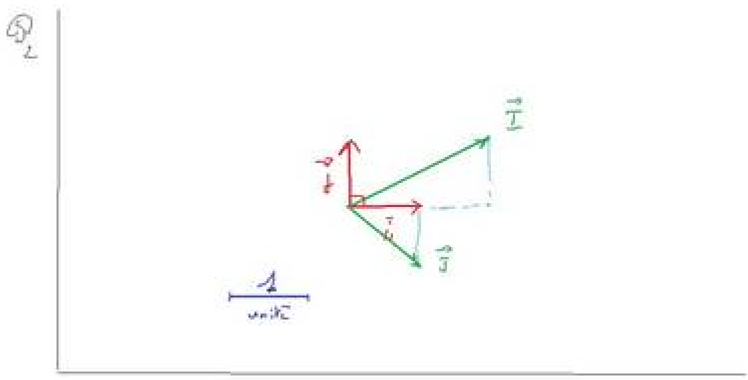
Si le plan vectoriel P_2 n'est pas étudié comme étant euclidien, on peut dessiner comme ci-dessous :



Il n'y a aucune notion de norme unitaire ou d'angle droit dans le dessin (ou alors on considère qu'il existe une troisième base orthonormée directe, dans laquelle on a dessiné $(i\,;j)$ et $(I\,;J)$.

Si on considère $B(i\,;j)$ conne étant la base canonique (base de référence du plan *euclidien*).

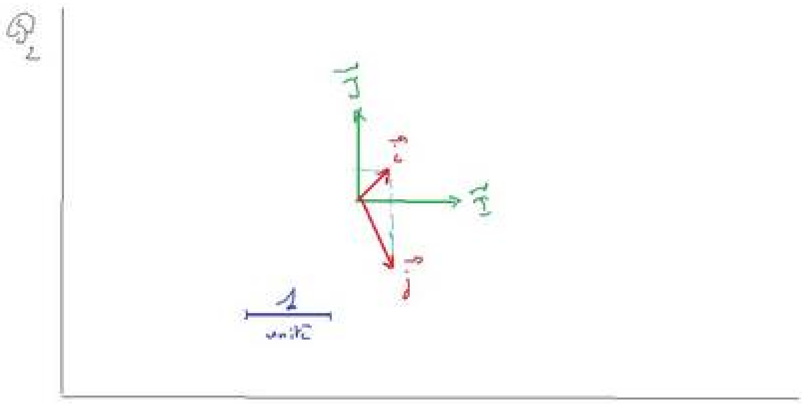
Tout en respectant $I = 2i + j$ et $J = i - j$, le dessin devient :



C'est un peu comme si on chaussait des lunettes déformantes, qui ont transformé le dessin précédent de façon à rendre $(i\,;j)$ orthonormée directe, tout en respectant les combinaisons linéaires $au + bv$.

Si on considère $B'(I\,;jJ)$ conne étant la base canonique (base de référence du plan *euclidien*).

Tout en respectant $I = 2i + j$ et $J = i - j$, donc $i = \frac{1}{3}I + \frac{1}{3}J$ et $j = \frac{1}{3}I - \frac{2}{3}J$, le dessin devient :



Il est normal mais assez amusant de constater que les combinaisons $I = 2i + j$ et $J = i - j$ sont respectées.

De nouvelles lunettes déformantes, ont transformé le dessin précédent de façon à rendre $(I; J)$ orthonormée directe, tout en respectant les combinaisons linéaires $au + bv$.

<u>Espaces Vectoriels – Changement de Base – Influence sur la Matrice d'une Application Linéaire :</u>

Une application f du plan vectoriel P_2 dans lui-même est telle que $f(au + bv) = a.f(u) + b.f(v)$, $\forall u$ et $v \in P_2$.

On note P_2 *pour rappeler qu'un plan vectoriel est de* <u>dimension 2</u>*, Bases constituées de* 2 *vecteurs libres et non nuls.*

Soit $B(i\,;j)$ une base de P_2 .

Soit un couple $(I\,;J)$ de vecteurs, tels que $I = 2i + j$ et $J = i - j$. On a vu que $(I\,;J)$ constitue une base de P_2 .

La matrice A de f dans la base B est constituée, dans l'ordre, des colonnes $f(i)$ et $f(j)$, images par f des vecteurs de base, calculées dans la base B , e, fonction de i et j : Supposons $f(i) = i - 2j$ et $f(j) = -j$, d'où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

On recherche la matrice A' de f dans la base B' , dont les colonnes sont $f(I)$ et $f(J)$, calculées en fonction de I et J .

Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base B à la base B'.

Montrons que : $A' = P^{-1}.A.P$.

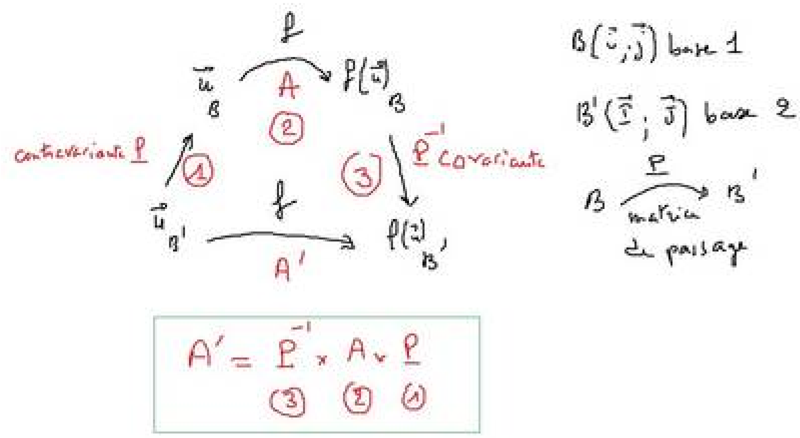
P travaille en 1er, puis A, puis P^{-1}.

On note $A \times u_B = f(u)_B$ et $A' \times u_{B'} = f(u)_{B'}$.

P est *contravariante*, d'où : $P \times u_{B'} = u_B$, tandis que P^{-1} est *covariante*, d'où : $P^{-1} \times f(u)_B = f(u)_{B'}$.

$P \times u_{B'} = u_B \Rightarrow A \times P \times u_{B'} = A \times u_B$, soit $A \times P \times u_{B'} = f(u)_B$.

$P^{-1} \times A \times P \times u_{B'} = P^{-1} \times f(u)_B = f(u)_{B'} = A' \times u_{B'}$. En comparant $[P^{-1} \times A \times P] \times u_{B'}$ à $A' \times u_{B'}$, on déduit : $A' = P^{-1} \times A \times P$.



Application à l'exemple donné :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{c}{D} \\ -\frac{b}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$A' = P^{-1} \times A \times P = P^{-1} \times (A \times P) = P^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(I) = -I + 4J \text{ et } f(J) = J.$$

Verification :

$$f(I) = f(2i + j) = 2f(i) + f(j) = 2(i - 2j) + (-j) = 2i - 5j = 2(\frac{1}{3}.I + \frac{1}{3}.J) - 5(\frac{1}{3}.I - \frac{2}{3}.J) = -I + 4J.$$

$$f(J) = f(i - j) = f(i) - f(j) = (i - 2j) - (-j) = i - j = J.$$