Différences ente les notations TES et TS :

Prenons un exemple :

Notation ES : Présentation adoptée par les spécialistes des probabilités.

Soit p_n la probabilité pour qu'à PARIS l'air soit exagérément pollué le jour n, donc $1 - p_n$ qu'il ne le soit pas.

Soit l'état de la pollution le jour n : $E_n(P_n\,;S_n)$, $\begin{cases} P_n \text{ « pollué le jour } n \text{ », de probabilité } p_n \\ S_n \text{ « sain le jour } n \text{ », de probabilité } 1-p_n \end{cases}$.

L'état de la pollution le jour $n+1$: $E_{n+1}(P_{n+1}\,;S_{n+1})$, $\begin{cases} P_{n+1} \text{ « pollué le jour } n+1 \text{ », de probabilité } p_{n+1} \\ S_{n+1} \text{ « sain le jour } n+1\text{», de probabilité } 1-p_{n+1} \end{cases}$.

Les vecteurs probabilités correspondants J_n et J_{n+1} sont notés ***horizontalement*** (*toute la différence est là*).

$J_n = (p_n\,;q_n)$ et $J_{n+1} = (p_{n+1}\,;q_{n+1})$, avec $q_n = 1 - p_n$ et $q_{n+1} = 1 - p_{n+1}$.

La matrice M de *transition* entre J_n et J_{n+1} exprime : $\boldsymbol{J_{n+1} = J_n \times M}$ (inversion de l'ordre d'écriture).

$$(p_{n+1}\,;q_{n+1}) = (p_n\,;q_n)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{cases} p_{n+1} = a.p_n + c.q_n \\ q_{n+1} = b.p_n + d.q_n \end{cases}, \text{avec } \begin{cases} p_n + q_n = 1 \\ p_{n+1} + q_{n+1} = 1 \end{cases}.$$

La 1[ère] ligne de la matrice $(a \quad b) = (p_{P_n}(P_{n+1}) \quad p_{P_n}(S_{n+1}))$

probabilité de l'état E_{n+1} sachant P_n (pollué le jour n).

La 2[ème] ligne de la matrice $(c \quad d) = (p_{S_n}(P_{n+1}) \quad p_{S_n}(S_{n+1}))$

probabilité de l'état E_{n+1} sachant S_n (sain le jour n).

Exemple : Supposons que la probabilité que l'air soit pollué un jour est de $\frac{2}{3}$ si l'air était pollué la veille, et $\frac{1}{4}$ si l'air était sain la veille.

$p_{P_n}(P_{n+1}) = \frac{2}{3}$ et $p_{S_n}(P_{n+1}) = \frac{1}{4} \Rightarrow p_{n+1} = p(P_n) \times p_{P_n}(P_{n+1}) + p(S_n) \times p_{S_n}(P_{n+1})$,

$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{4}(1-p_n) = \frac{1}{4} + \frac{5}{12}p_n$.

$p_{P_n}(S_{n+1}) = \frac{1}{3}$ et $p_{S_n}(S_{n+1}) = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - p_{n+1} = p(P_n) \times p_{P_n}(S_{n+1}) + p(S_n) \times p_{S_n}(S_{n+1})$,

$q_{n+1} = 1 - p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{3}{4}q_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{3}{4}(1-p_n) = \frac{3}{4} - \frac{5}{12}p_n$.

On remarque que l'on a bien $p_{n+1} + q_{n+1} = 1$.

On déduit $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $(p_{n+1}\,;q_{n+1}) = (p_n\,;q_n)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n = \frac{1}{4} + \frac{5}{12}p_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{3}{4}q_n = \frac{3}{4} - \frac{5}{12}p_n \end{cases}$.

Notation S : Présentation adoptée par les spécialistes des mathématiques.

Soit p_n la probabilité pour qu'à PARIS l'air soit exagérément pollué le jour n, donc $1 - p_n$ qu'il ne le soit pas.

Soit l'état de la pollution le jour n : $E_n(P_n\,;S_n)$, $\begin{cases} P_n \text{ « pollué le jour } n \text{ », de probabilité } p_n \\ S_n \text{ « sain le jour } n \text{ », de probabilité } 1-p_n \end{cases}$.

L'état de la pollution le jour $n+1$: $E_{n+1}(P_{n+1}\,;S_{n+1})$, $\begin{cases} P_{n+1} \text{ « pollué le jour } n+1 \text{ », de probabilité } p_{n+1} \\ S_{n+1} \text{ « sain le jour } n+1\text{», de probabilité } 1-p_{n+1} \end{cases}$.

Les vecteurs probabilités correspondants J_n et J_{n+1} sont notés ***verticalement*** .

$$J_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \text{ et } J_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix}, \text{ avec } q_n = 1 - p_n \text{ et } q_{n+1} = 1 - p_{n+1} .$$

La matrice M de ***transition*** entre J_n et J_{n+1} exprime : $\boldsymbol{J_{n+1} = M \times J_n}$ (ordre habituel d'écriture).

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} a & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} & d \end{pmatrix} \begin{cases} p_{n+1} = a.p_n + c.q_n \\ q_{n+1} = b.p_n + d.q_n \end{cases}, \text{ avec } \begin{cases} p_n + q_n = 1 \\ p_{n+1} + q_{n+1} = 1 \end{cases} .$$

La 1ère **colonne** de la matrice $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{P_n}(P_{n+1}) \\ p_{P_n}(S_{n+1}) \end{pmatrix}$, probabilité de l'état E_{n+1} sachant P_n (pollué le jour n).

La 2ème **colonne** de la matrice $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{S_n}(P_{n+1}) \\ p_{S_n}(S_{n+1}) \end{pmatrix}$, probabilité de l'état E_{n+1} sachant S_n (sain le jour n).

Même exemple : Supposons que la probabilité que l'air soit pollué un jour est de $\frac{2}{3}$ si l'air était pollué la veille, et $\frac{1}{4}$ si l'air était sain la veille.

$p_{P_n}(P_{n+1}) = \frac{2}{3}$ et $p_{S_n}(P_{n+1}) = \frac{1}{4} \Rightarrow p_{n+1} = p(P_n) \times p_{P_n}(P_{n+1}) + p(S_n) \times p_{S_n}(P_{n+1})$,

$p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{4} q_n = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{4}(1 - p_n) = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} p_n$.

$p_{P_n}(S_{n+1}) = \frac{1}{3}$ et $p_{S_n}(S_{n+1}) = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - p_{n+1} = p(P_n) \times p_{P_n}(S_{n+1}) + p(S_n) \times p_{S_n}(S_{n+1})$,

$q_{n+1} = 1 - p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{3}{4} q_n = \frac{1}{3} p_n + \frac{3}{4}(1 - p_n) = \frac{3}{4} - \frac{5}{12} p_n$.

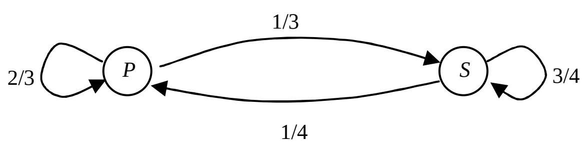
On remarque que l'on a bien $p_{n+1} + q_{n+1} = 1$.

On déduit $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{4} q_n = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} p_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{3}{4} q_n = \frac{3}{4} - \frac{5}{12} p_n \end{cases}$.

<u>Il importe donc d'être très attentif à la formulation de l'énoncé donné, afin de déceler la présentation souhaitée.</u>

Nous adopterons par la suite la présentation mathématique : $\boldsymbol{J_{n+1} = M \times J_n}$ **.**

<u>Présentation sous forme d'un graphe</u> :



Matrice P de **Passage** :

On souhaite, à partir de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, déterminer une matrice $M' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}$ diagonale telle qu'il existe une matrice de passage P inversible, avec $P \times J = U \Leftrightarrow P^{-1} \times U = J$, qui vérifie $J_{n+1} = M \times J_n \Leftrightarrow U_{n+1} = M' \times U_n$.

C'est à dire : $U_{n+1} = M' \times U_n \Leftrightarrow P \times J_{n+1} = M' \times P \times J_n \Leftrightarrow J_{n+1} = \mathbf{P^{-1} \times M' \times P} \times J_n$,

$M = P^{-1} \times M' \times P \Leftrightarrow M' = P \times M \times P^{-1}$.

Avec l'exemple précédent :

$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant $D = ad - bc \neq 0$. On sait qu'alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{b}{D} \\ -\frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix}$.

Dans un exercice, on donne généralement les valeurs de P.

Développons la méthode :

On veut : $M' = P \times M \times P^{-1}$ avec $M' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}$.

$$M' = P \times M \times P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{b}{D} \\ -\frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a+b}{3} & \frac{a+3b}{4} \\ \frac{2c+d}{3} & \frac{c+3d}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{b}{D} \\ -\frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8a+4b}{12} & \frac{3a+9b}{12} \\ \frac{8c+4d}{12} & \frac{3c+9d}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{b}{D} \\ -\frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix},$$

$$M' = P \times M \times P^{-1} = \frac{1}{12D}\begin{pmatrix} 8a+4b & 3a+9b \\ 8c+4d & 3c+9d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{12D}\begin{pmatrix} 8ad+4bd-3ac-9bc & -8ab-4b^2+3a^2+9ab \\ 8cd+4d^2-3c^2-9cd & -8bc-4bd+3ac+9ad \end{pmatrix},$$

$$M' = \frac{1}{12D}\begin{pmatrix} 8ad+4bd-3ac-9bc & ab-4b^2+3a^2 \\ -cd+4d^2-3c^2 & -8bc-4bd+3ac+9ad \end{pmatrix}.$$

Imposons les deux coefficients de $M' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}$, qui doivent être nuls $\begin{cases} ab - 4b^2 + 3a^2 = 0 \\ -cd + 4d^2 - 3c^2 = 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} ab - 4b^2 + 3a^2 = 0 \\ -cd + 4d^2 - 3c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab - 4b^2 + 3a^2 = 0 \\ cd - 4d^2 + 3c^2 = 0 \end{cases}$. On ne peut envisager $d = b$ et $c = a$, sinon $D = ad - bc = 0$.

$ab - 4b^2 + 3a^2 = 0$, soit $4b^2 - ab - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - ax - 3a^2 = 0$.

$$\Delta = B^2 - 4AC = a^2 + 48a^2 = 49a^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{a-7a}{8} = -\frac{3}{4}a \\ x_2 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{a+7a}{8} = a \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} b_1 = -\frac{3}{4}a \\ b_2 = a \end{cases}.$$

$cd - 4d^2 + 3c^2 = 0$, soit $4d^2 - cd - 3c^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - cx - 3c^2 = 0$.

$$\Delta = B^2 - 4AC = c^2 + 48c^2 = 49c^2 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{c-7c}{8} = -\frac{3}{4}c \\ x_4 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{c+7c}{8} = c \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} d_1 = -\frac{3}{4}c \\ d_2 = c \end{cases}.$$

- 1er cas : $\begin{pmatrix} a & -\frac{3}{4}a \\ c & -\frac{3}{4}c \end{pmatrix}$ n'est pas acceptable, car $D = 0$.
- **2ème cas** : $\begin{pmatrix} a & -\frac{3}{4}a \\ c & c \end{pmatrix}$ est acceptable, avec $D = \frac{7}{4}ac$.
- **3ème cas** : $\begin{pmatrix} a & a \\ c & -\frac{3}{4}c \end{pmatrix}$ est acceptable, avec $D = -\frac{7}{4}ac$.
- 4ème cas : $\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$ n'est pas acceptable, car $D = 0$.

$2^{ème}$ cas : Pour $a = 4$, on déduit $b = -3$, $c = 4$, $d = 4$,

soit $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$, $D = ad - bc = 28$ et $\boldsymbol{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{28} & \frac{3}{28} \\ \frac{-4}{28} & \frac{4}{28} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{28}} \\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}} \end{pmatrix}$, soit $P \times P^{-1} = P^{-1} \times P = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient $M' = P \times M \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{28} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{12} & \frac{3}{12} \\ \frac{4}{12} & \frac{9}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{28} & \frac{3}{28} \\ \frac{-4}{28} & \frac{4}{28} \end{pmatrix}$,

$M' = \frac{1}{12} \times \frac{1}{28} \times \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{336} \begin{pmatrix} 20 & -15 \\ 48 & 48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{336} \begin{pmatrix} 140 & 0 \\ 0 & 336 \end{pmatrix}$.

$M' = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est bien une matrice diagonale, qui va travailler sur les vecteurs U .

<u>Intérêt des matrices diagonales</u> :

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}} \text{ et } \boldsymbol{A' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \Rightarrow A \times A' = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & bb' \end{pmatrix}}, \text{ d'où } \boldsymbol{A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}}.$$

$$\textbf{Donc } \boldsymbol{U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow U_n = A^n \times U = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}, \textbf{ soit } \boldsymbol{U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n.x_0 \\ b^n.y_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = a^n \times x_0 \\ y_n = b^n \times y_0 \end{cases}}.$$

<u>Application à l'exercice</u> :

$M' = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = M' \times U_n$, d'où : $U_n = (M')^n \times U_0$,

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{5}{12})^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_n = \left(\frac{5}{12}\right)^n \times X_0 \\ Y_n = Y_0 \end{cases}.$$

<u>Retour vers</u> J_n :

$P \times J = U \Leftrightarrow P^{-1} \times U = J$, soit $P \times J_n = U_n \Leftrightarrow P^{-1} \times U_n = J_n \Leftrightarrow P^{-1} \times (M')^n \times U_0 = J_n$,

$$P^{-1} \times (M')^n \times P \times J_0 = J_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{28} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{5}{12})^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{28} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\left(\frac{5}{12}\right)^n & -3\left(\frac{5}{12}\right)^n \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7} & -\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7} & \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

On déduit : $p_n = \left[\frac{4}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7}\right] \times p_0 + \left[-\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7}\right] \times q_0$, avec $q_0 = 1 - p_0$.

$$\boldsymbol{p_n = \left(\frac{5}{12}\right)^n \times p_0 + \left[-\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7}\right]}.$$

p_0 est la probabilité que l'air soit pollué le jour initial, ce que l'on connait : $p_0 = 1$ ou $p_0 = 0$, selon qu'aujourd'hui l'ai est pollué ou non.

Si aujourd'hui l'air est sain : $p_0 = 0 \Rightarrow p_n = -\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7}$, probabilité que l'air soit pollué dans n jours.

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{7}$, ce qui signifie que sachant qu'aujourd'hui l'air est sain, à terme, il y aura une moyenne de 3 jours pollués par semaine (pas nécessairement dans la même semaine).

On atteint alors un ***état stable J*** : $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} p_n = p = \frac{3}{7} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} q_n = q = \frac{4}{7} \end{cases}$ et $J = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ vérifiant $M \times J = J$.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{12} & \frac{3}{12} \\ \frac{4}{12} & \frac{9}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 36 \\ 48 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

Remarque :

Si aujourd'hui l'air est pollué : $p_0 = 1 \Rightarrow p_n = -\frac{2}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7}$, probabilité que l'air soit pollué dans n jours.

On retrouve $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{7}$.

La probabilité moyenne d'un air pollué est indépendante de la qualité de l'air aujourd'hui.

Remarque **:** **Intérêt des matrices triangulaires :**

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix} \Rightarrow A \times A' = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bd' & ac' + be' + cf' \\ 0 & dd' & de' + ef' \\ 0 & 0 & ff' \end{pmatrix}.$$

Le produit de deux matrices triangulaires est une matrice triangulaire.

Il en est de même avec des matrices strictement triangulaires (diagonale principale nulle).