Application linéaire :

Soit V un espace vectoriel, ensemble de vecteurs tel que, pour tous nombres a , b réels :

$$\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v} \in V \Rightarrow a.\overrightarrow{u} + b.\overrightarrow{v} \in V$$

On dit que V contient toutes les ***combinaisons linéaires*** de ses propres vecteurs.

f est une ***application linéaire*** de V dans V' si et seulement si :

Pour tout $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} \in V$, et tout a , $b \in \mathbb{R}$: $f(a.\overrightarrow{u} + b.\overrightarrow{v}) = a.f(\overrightarrow{u}) + b.f(\overrightarrow{v})$.

On dit que f est une application linéaire de V dans V' si et seulement si,

l'image par f de toute combinaison linéaire de ses vecteurs est la même combinaison des images de ces vecteurs.

Exemples :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $f(x) = -3x$, pour tout x réel.

Vérifions que f est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

Soient x , x' réels et a , b réels : $f(ax + bx') = -3(ax + bx') = -3ax - 3bx' = a(-3x) + b(-3x') = a.f(x) + b.f(x')$.

f est bien linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $f(x) = x^2$, pour tout x réel.

Vérifions que f n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

Soient x , x' réels et a , b réels : $\begin{cases} f(ax + bx') = (ax + bx')^2 = ax^2 + 2abx.x' + bx'^2 \\ a.f(x) + b.f(x') = ax^2 + bx'^2 \end{cases}$.

f n'est pas linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $f(x , y) = 2x + 3y$, pour tout x , y réels.

Vérifions que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

Soient $(x ; y)$, $(x' ; y')$ couples de $\mathbb{R}^2$ et a , b réels :

$f[a(x ; y) + b(x' ; y')] = f(ax + bx' ; ay + by') = 2(ax + bx') + 3(ay + by') = (2ax + 3ay) + (2bx' + 3by')$,

$f[a(x ; y) + b(x' ; y')] = a(2x + 3y) + b(2x' + 3y') = a.f(x ; y) + b.f(x' ; y')$.

f est bien linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

D'une façon générale, f sera une <u>application linéaire</u> de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ tant que l'image de tout p-plet de $\mathbb{R}^p$ est un n-plet de $\mathbb{R}^n$, ne comportant que des combinaisons d'expressions linéaires, sans degré, sans racine et autre fonctions.

Ainsi :

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x ; y) = (2x ; x + y ; -3x + 2y)$ est linéaire.

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g(x ; y) = (2x ; x \mathbf{+ 1})$ n'est pas linéaire.

$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $h(x ; y ; z) = -x + 3y - \frac{1}{2}z$ est linéaire.

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $k(x) = (\boldsymbol{x^2} ; 2x \mathbf{+ 3})$ n'est pas linéaire.

Matrice d'une application linéaire :

Soit f application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

L'application f est complètement déterminée dès que l'on connait l'image dan $\mathbb{R}^n$ de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

C'est-à-dire que l'on est alors capable de déterminer l'image de tout *p-plet* $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_p)$.

Exemple :

Soit f application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, telle que $f(1 ; 0) = (2 ; -3)$ et $f(0 ; 1) = (-1 ; 1)$.

Déterminer $f(4 ; -5)$.

$(4 ; -5) = 4(1 ; 0) - 5(0 ; 1)$.

Comme f est linéaire :

$f(4 ; -5) = 4.f(1 ; 0) - 5.f(0 ; 1) = 4.(2 ; -3) - 5.(-1 ; 1) = (4\times2 - 5\times(-1) ; 4\times(-3) - 5\times(1)) = (13 ; -17)$.

Soit f application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\begin{cases} f(1 ; 0 ; 0) = 4 \\ f(0 ; 1 ; 0) = -1 \\ f(0 ; 0 ; 1) = 0 \end{cases}$.

Déterminer $f(2 ; 1 ; 3)$.

$(2 ; 1 ; 3) = 2(1 ; 0 ; 0) + 1(0 ; 1 ; 0) + 3(0 ; 0 ; 1)$.

Comme f est linéaire :

$f(2 ; 1 ; 3) = 2.f(1 ; 0 , 0) + 1.f(0 ; 1 ; 0) + 3.f(0 ; 0 ; 1) = 2\times4 + 1\times1 + 3\times0 = 9$.

On appelle *Matrice M* de l'application f linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, le tableau rectangulaire $p \times n$, *p colonnes, n lignes*, tel que la colonne d'ordre i $(1 \le i \le p)$ soit l'image de $\overrightarrow{e_i}(0 ; 0 ; \dots ; 1 ; .. ; 0)$, avec 1 en $i^{ième}$ position.

Exemple :

f linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $\begin{cases} f(1 ; 0) = (2 ; 1 ; 1) \\ f(0 ; 1) = (0 ; -2 ; 3) \end{cases}$ $\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On peut alors aisément retrouver l'image de n'importe quel couple $(x ; y)$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 0y \\ 1x - 2y \\ 1x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x - 2y \\ x + 3y \end{pmatrix}$.

$f(x ; y) = (2x ; x - 2y ; x + 3y)$. L'image du couple $(x ; y)$ est un triplet $(X ; Y ; Z)$. (f linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$).

Soit f linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer $f(-3 ; 1 ; -1)$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\times(-3) + 1\times1 + 2\times(-1) + 1\times(-3) + 2\times1 + 3\times(-1) + 2\times(-3) + 3\times1 + 4\times(-1) = -12$.

On multiplie chaque ligne par le vecteur colonne.

Notation symbolique :

Soit f linéaire de $\mathbb{R}^m$ *dans* $\mathbb{R}^n$.

Soit $\overrightarrow{e_i}(0 ; 0 ; \dots ; 1 ; 0 ; \dots 0)$, le 1 étant en $i^{ième}$ position.

Soit $f(\overrightarrow{e_i}) = (a_{1,i} ; a_{2,i} ; \dots . ; a_{n,i})$, avec $1 \le i \le n$.

f admet pour matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots\ldots a_{nm} \end{pmatrix}$, notée (a_{ij}) avec $\begin{cases} 1 \leq i \leq m & \text{indice de ligne} \\ 1 \leq j \leq n & \text{indice de colonne} \end{cases}$.

Chaque colonne d'ordre i est l'image $f(\overrightarrow{e_i})$ du vecteur de base $\overrightarrow{e_i}$ (m dimension de départ, n d'arrivée).

<u>Opérations sur les matrices :</u>

- <u>*Combinaison linéaire $a.M + b.M'$ – Combinaison d'applications linéaires $a.f + b.g$*</u> :

Attention !! *f et g doivent travailler sur les mêmes ensembles de départ $\mathbb{R}^m$ et d'arrivée $\mathbb{R}^n$.*

Soit f linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ et k réel.

Soit $M = (a_{ij})$ la matrice de f.

L'application linéaire $g = k.f$ admet pour matrice $k.M = (k.a_{ij})$, produit de chaque coefficient de la matrice M par k.

Preuve :

$f(\overrightarrow{e_i}) = (a_{1,i}\,;\, a_{2,i}\,;\, \ldots.\,;\, a_{n,i})$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice M.

$g(\overrightarrow{e_i}) = k.f(\overrightarrow{e_i}) = (k.a_{1,i}\,;\, k.a_{2,i}\,;\, \ldots.\,;\, k.a_{n,i})$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice M' de $g = k.f$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow -2M = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $M = (a_{ij})$ la matrice de f et $M' = (b_{ij})$ la matrice de g, toutes deux linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, p et q réels.

L'application linéaire $h = p.f + q.g$ admet $M'' = p.M + q.M' = (p.a_{ij} + q.b_{ij})$ pour matrice, somme de chaque coefficient de même position dans chaque matrice.

Preuve :

$f(\overrightarrow{e_i}) = (a_{1,i}\,;\, a_{2,i}\,;\, \ldots.\,;\, a_{n,i})$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice M.

$g(\overrightarrow{e_i}) = (b_{1,i}\,;\, b_{2,i}\,;\, \ldots.\,;\, b_{n,i})$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice M'.

$h(\overrightarrow{e_i}) = (f+g)(\overrightarrow{e_i}) = f(\overrightarrow{e_i}) + g(\overrightarrow{e_i}) = (a_{1,i}\,;\, a_{2,i}\,;\, \ldots.\,;\, a_{n,i}) + (b_{1,i}\,;\, b_{2,i}\,;\, \ldots.\,;\, b_{n,i})$,

$h(\overrightarrow{e_i}) = (a_{1,i} + b_{1,i}\,;\, a_{2,i} + b_{2,i}\,;\, \ldots.\,;\, a_{n,i} + b_{n,i})$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice M'' de $h = f + g$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow M'' = M + M' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- <u>*Produit de Matrices $M' \times M$ – Composition d'applications linéaires $g \circ f$*</u> :

Attention !! *g doit travailler en continuité de f (**<u>non commutativité</u>**)*

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \\ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \end{cases} \Rightarrow g \circ f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p .$$

Soit $M = (a_{ij})$, matrice de f, linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$,

$M' = (b_{ij})$ la matrice de g, linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

L'application linéaire $h = g \circ f$ admet $M'' = M' \times M = (c_{ij})$ pour matrice (attention, le produit n'est pas commutatif.

On multiplie chaque ligne de M' par chaque colonne de M.

Preuve :

$h(\overrightarrow{e_i}) = (g \circ f)(\overrightarrow{e_i}) = g[f(\overrightarrow{e_i})]$, image par g de chaque colonne $f(\overrightarrow{e_i})$ de la matrice M.

On multiplie chaque ligne de M' par chaque colonne de M pour écrire $M'' = M' \times M$.

f linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, de matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

g linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, de matrice $M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

$g \circ f$ est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, de matrice $M'' = M' \times M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 8 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Ainsi :

La 1ère colonne de M'' est l'image par M' de la 1ère colonne de M. $g(f(\overrightarrow{e_1})) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

La 2ème colonne de M'' est l'image par M' de la 2ème colonne de M. $g(f(\overrightarrow{e_2})) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

La 3ème colonne de M'' est l'image par M' de la 3ème colonne de M. $g(f(\overrightarrow{e_3})) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Matrices Carrées :

Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, admet une matrice M dite carrée, ou $n \times n$ (même nombre de lignes et de colonnes).

Ainsi $f : \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\begin{cases} f(1\,;0) = (2\,;-1) \\ f(0\,;1) = (0\,;2) \end{cases}$ a pour matrice 2×2 : $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cas particulier : $f = Id$, fonction Identité, soit $Id(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$: $\begin{cases} Id(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} \\ Id(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} \end{cases} \Rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrice carrée inversible :

Une matrice $n \times n$ est dite inversible
si et seulement si l'application linéaire f correspondante admet une réciproque f^{-1}, c'est-à-dire :
$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_n \Leftrightarrow M \times M' = M' \times M = I_n$.

***Exemple* : Soit f linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, de matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer M^{-1}, la matrice de f^{-1}.**

$f^{-1} \circ f = Id \Leftrightarrow M' \times M = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a-b & a+b \\ 2c-d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} 2a-b = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow (a\,;b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} 2c-d = 0 \\ c+d = 1 \end{cases} \Rightarrow (c\,;d) = (\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3})$.

On déduit : $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. On peut vérifier $\begin{cases} M^{-1} \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ M \times M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$.

Une matrice carrée 2×2 est inversible si et seulement si son *déterminant* D est non nul (f^{-1} existe) .

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ admet pour } \boldsymbol{déterminant} \quad \boldsymbol{D = ad - bc} \text{ (produit croisé).}$$

$$\boldsymbol{M} \textbf{ inversible} \Leftrightarrow \boldsymbol{D = ad - bc \neq 0} \quad \text{et alors} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{b}{D} \\ -\frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix} .$$

On remarquera que a , d *permutent* sur la diagonale principale , et que b , c ne permutent pas, mais changent de signe, sur la seconde diagonale.

Ainsi : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D = ad - bc = 3$ (M est inversible) $\Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{b}{D} \\ -\frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Application : Résolution de $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + y = 4 \end{cases}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

L'équation proposée équivaut à $M \times U = V \Leftrightarrow M^{-1} \times M \times U = M^{-1} \times V \Leftrightarrow U = M^{-1} \times V$

$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, soit $(x\,;y) = (-1\,;3)$.