Soit un repère $(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ du plan.

Tout point $M(x\,;\,y)$ du plan se détermine par la connaissance de son abscisse $x$ et son ordonnée $y$, raison pour laquelle on dit que le plan est de *dimension* 2 (choix libre des deux valeurs de $x$ et $y$) . On parle de deux degrés de liberté.

| $M(x\,,\,y)$ dans $(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ . |
|---|

**Equation Cartésienne d'une droite affine du plan :**

L'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ d'une même droite $D$ du plan vérifient une équation de type $ax + by + c = 0$ , avec $a, b, c$ réels.

Ainsi, tout point $M(x\,;\,y)$ de la droite $D : 2x + y - 5 = 0$ , doit vérifier cette équation :

*Exemple* :

$A(1\,;\,3) \in D$ , car $2\times1 + 3 - 5 = 0$ ,

$B(-2\,;\,7) \notin D$ , car $2(-2) + 3 - 5 = -6$ non nul.

Une droite affine du plan est un ensemble de *dimension* 1 (La relation $ax + by + c = 0$ permet le calcul de $y$ en fonction de $x$ , ou de $y$ en fonction de $x$ , donc un seul degré de liberté, $x$ ou $y$ , l'autre coordonnée se calculant par rapport à celle fixée.

*Exemple* :

**Soit la droite affine $D$ d'équation cartésienne $x - y - 1 = 0$ .**

**Déterminer son point d'intersection $A$ avec l'axe des abscisses $x'x$ .**

Tout point de l'axe $x'x$ est d'ordonnée nulle (hauteur nulle), soit $A(x\,;\,y) \in x'x \Leftrightarrow y = 0$ , d'où $A(x\,;\,0)$ .

Si de plus $A(x\,;\,0) \in D$ , il vérifie son équation cartésienne, soit : $x - 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1$ .

Le point d'intersection cherché est $A(1\,;\,0)$ .

*Autre présentation* :

$A(x\,;\,y) \in D \cap x'x \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ , soit : $x - 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1$ . D'où : $D \cap x'x = \{A(1\,;\,0)\}$ .

| Une *équation cartésienne* de droite affine du plan est une *connaissance globale* de cette droite, c'est-à-dire que l'on ne connait pas individuellement chaque point de la droite, mais la condition à vérifier qui caractérise tous les points de cette droite. |
|---|

Une *équation cartésienne* de droite est le *nom de famille* des points $M(x\,;\,y)$ de cette droite.

*Remarques* :

Une même droite affine du plan admet une infinité d'équations cartésiennes, toutes multiples les unes des autres.

| $\begin{cases} D : ax + by + c = 0 \\ D' : a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ représentent une même droite si et seulement si $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ (si $a'$ , $b'$ , $c'$ non nuls). |
|---|

$D$ : $ax + by + c = 0$ est une équation généralisée de droite, ($a$ , $b$ , $c$ quelconques).

Exemple : $D : 2x - 3y + 1 = 0$ .

$D : y = Ax + B$ est une équation réduite de droite (seulement si $b \neq 0$).

Exemple : $D : 2x - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow D : y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$ .

*Cas particuliers* :

$D : y = k$ est une droite horizontale ($a = 0$) et $D' : x = k'$ est une droite verticale ($b = 0$) .

**<u>Equation Paramétrique d'une droite affine du plan :</u>**

L'ensemble des points $M(x\,;y)$ d'une même droite $D$ du plan vérifient un système d'équations de type $\begin{cases} x = a + ka' \\ y = b + kb' \end{cases}$ , quel que soit $k$ réel (avec $a, b, a', b'$ réels).

$A(a\,;b)$ est un des points de la droite $D$ , et $\vec{u}(a'\,;b')$ est un vecteur directeur de la droite $D$ (sa direction).

$D : \begin{cases} x = a + ka' \\ y = b + kb' \end{cases}$ est une traduction de $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k.\,\vec{u}$ .

A chaque valeur réelle du paramètre $k$ , correspond un et un seul point de la droite $D$ .

*Exemple* :

$D : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + 3k \end{cases}$ , pour tout $k$ réel, passe par le point $A(1\,;-1)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}(2\,;3)$ .

*Exemple* :

**Soit la droite affine $D$ d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ , pour tout $t$ réel.**

**Déterminer son point d'intersection $B$ avec l'axe des ordonnées $y'y$ .**

Tout point de l'axe $y'y$ est d'abscisse nulle, soit $B(x\,;y) \in y'y \Leftrightarrow x = 0$ , d'où $B(0\,;y)$ .

Si de plus $B(0\,;y) \in D$ , il vérifie son équation paramétrique, d'où : $x = 0 \Leftrightarrow 2 + t = 0$ , donc $t = -2$ .

Le point $B$ cherché est celui qui correspond à la valeur $t = -2$ du paramètre, soit $\begin{cases} x_B = 2 + (-2) = 0 \\ y_B = -1 + 2(-2) = -5 \end{cases}$ .

D'où : $D \cap y'y = \{B(0\,;-5)\}$ .

| |
|---|
| Une <u>*équation paramétrique*</u> de droite affine du plan est une <u>*connaissance individuelle de chaque point*</u> de cette droite, c'est-à-dire que l'on oublie la condition globale d'appartenance à la droite, au profit de l'écriture individuelle des coordonnées de chaque point de cette droite, en faisant varier la valeur du paramètre. |

Une <u>*équation paramétrique*</u> de droite est l'écriture <u>*individuelle*</u> des coordonnées de chaque point $M(x\,;y)$ de cette droite.

*Remarques* :

Une droite affine du plan admet une infinité d'équations paramétriques, selon le choix du point par lequel elle passe, <u>ou</u> le choix de son vecteur directeur.

Pour une même droite, tous les vecteurs directeurs sont multiples entre eux (colinéarité)

| |
|---|
| $\begin{cases} x = a + ka' \\ y = b + kb' \end{cases}$ et $\begin{cases} x = c + tc' \\ y = d + td' \end{cases}$ représentent une même droite $D$ si et seulement si $A(a\,;b)$ et $B(c\,;d)$ appartiennent à $D$ , et que $\vec{u}(a'\,;b')$ et $\vec{v}(c'\,;d')$ soient colinéaires. |

*Exemple* :

**Soit $D : \begin{cases} x = 3k \\ y = 1 - 2k \end{cases}$ , pour tout $k$ réel, et $D'$ : $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ , pour tout $t$ réel.**

**Vérifier que $D$ et $D'$ sont strictement parallèles.**

$D$ passe par $A(0\,;1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(3\,;-2)$ ,

$D'$ passe par $B(1\,;2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}(-6\,;3)$ .

On constate que $\vec{v} = -2\vec{u}$ , donc $D$ et $D'$ sont parallèles.

Par contre : $B(1\,;2) \notin D$ car $3k = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k = +\dfrac{1}{3} \\ 1 - 2k = 2 \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ , valeurs de $k$ incompatibles.

Les droites sont strictement parallèles.

**<u>Relation entre Equation Paramétrique et Equation cartésienne d'une droite affine du plan :</u>**

- <u>Passage d'une équation paramétrique de $D$ à une équation cartésienne de $D$</u> :

*Exemple* :

**Soit $D$ : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + 3k \end{cases}$ , pour tout $k$ réel. En déterminer une équation cartésienne.**

On exprime $k$ en fonction de $x$ et $y$ : $\begin{cases} 2k = x - 1 \\ 3k = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow k = \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3}$ .

$\dfrac{y+1}{3} = \dfrac{x-1}{2} \Leftrightarrow 2(y+1) = 3(x-1) \Leftrightarrow D : 3x - 2y - 5 = 0$ , ou $D : y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$ .

**Soit $D$ : $3x - 2y - 5 = 0$ . En déterminer une équation paramétrique.**

Soit $A(x\,;y)$ le point de $D$ d'abscisse $x = +1$ .

$A(1\,;y) \in D \Leftrightarrow 3(1) - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow -2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -1$, soit $A(1\,;-1)$ .

Soit $B(x\,;y)$ le point de $D$ d'abscisse $x = +3$ .

$B(3\,;y) \in D \Leftrightarrow 3(3) - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow 4 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = +2$, soit $B(3\,;2)$ .

Le vecteur $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A) = \overrightarrow{AB}(2\,;3)$ est directeur de $D$ .

La droite $D$ passe par le point $A$ et a pour direction le vecteur $\overrightarrow{AB}$ , soit :

$M(x\,;y) \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k.\overrightarrow{AB}$ , soit $D : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + 3k \end{cases}$ , pour tout $k$ réel.

*Remarque :*

| Une droite affine d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\vec{u}(-b\,;-a)$ pour vecteur directeur. |
|---|

**<u>Equation Cartésienne d'une FAMILLE PARAMETREE de droites affines du plan :</u>**

*Exemple* :

**Soit $D_m$ : $(m-1)x + my + (2m+3) = 0$ , famille paramétrée par $m$ réel de droites du plan affine.**

Selon la valeur donnée à $m$ , on obtient les différentes équations cartésiennes des droites de la famille, lesquelles se construisent selon le modèle commun exprimé par $D_m$ .

Pour $m = 3$ : $D_3 : 2x + 3y + 9 = 0$ .

Pour $m = -1$ : $D_{-1} : -2x - y + 1 = 0$ .

**Déterminer la droite $D$ de la famille paramétrée $D_m$ précédente, qui est parallèle à l'axe des abscisses $x'x$ .**

Une droite horizontale s'écrit $D : y = k$ , donc ne comporte pas de terme facteur de $x$ .

Imposons $m - 1 = 0$ , soit $m = 1$ . D'où : $D = D_1 : y + 5 = 0$ , ou $D : y = -5$ .

*Autre méthode* :

$D_m$ admet $\vec{u}_m(-b\,;a) = \vec{u}_m(-m\,;m-1)$ pour vecteur directeur.

L'axe $x'x$ admet $\vec{i}(1\,;0)$ pour vecteur directeur.

Imposons $(\vec{u}_m , \vec{i})$ colinéaires (multiples) , soit $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ , d'où $D : y + 5 = 0$ , soit $D : y = -5$ .