***Remarques initiales* :**

- **On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi continue* sur $[a\ ;\ b]$ si elle peut prendre l'ensemble des valeurs x telles que $a \leq x \leq b$.**

  A l'inverse de ce qui est possible lorsque X suit une loi discrète, dans le cas d'une loi continue, il est impossible de calculer la probabilité pour que X prenne une valeur précise $x \in [a\ ;\ b]$.

  Exemple :

  Loi discrète : Un sac contient 5 jetons indiscernables au toucher, respectivement marqués des valeurs 0, 3, 6, 9, 12.

  En tirant un jeton au hasard, soit X la variable aléatoire égale au nombre porté par le jeton tiré.

  Dans ce cas, on peut parler d'une probabilité $p(X = 9) = \dfrac{1}{5} = 0{,}20$.

  Loi continue : Soit X l'heure indiquée par une montre. Entre 0h et 12h, quelle est la probabilité pour que la montre indique exactement 9h ?

  $p(X = 9)$ n'a aucun sens et n'est pas calculable, d'ailleurs dire « il est exactement 9h » fait qu'il n'est déjà plus 9h du simple fait de le dire, et dépend de la précision de l'horloge de référence (horloge parlante).

  On ne peut parler qu'en termes d'intervalles : $p(8:59 \leq X \leq 9:01) = \dfrac{2 \text{ min}}{12 \times 60\text{mn}} = 0{,}0028$.

- **Densité de probabilité $f(x)$** :

  Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité continue.

  On ne peut pas parler de probabilité $p(X = a)$, mais de *densité de probabilité* $f(a)$ pour $x = a$.

  Comparaison avec la notion de vitesse instantanée :

  On note $a(t)$ l'accélération d'un véhicule à l'instant t .

  Si on considère que le véhicule était à la vitesse $v_0 = 0$ à l'instant 0 , que son accélération est toujours positive (vitesse croissante), sa vitesse instantanée à l'instant t est l'accumulation d'accélération entre les instants 0 et a :

  $v(a) = v(0 \leq t \leq a) = \int_0^a a(t)\, dt$ (*Remarque* : $v'(t) = a(t)$).

  On peut aussi dire que l'accroissement de vitesse entre les instants t et $t + h$ est $v(t + h) - v(t) = h.a(t)$ aussi noté $v(t + dt) - v(t) = a(t).dt$.

  D'où : $v(a) = v(0 \leq t \leq a) = \sum_{t=0}^{a} h.a(t) = \int_0^a a(t)\, dt$.

  De même, si X suit une loi de probabilité continue, la *densité de probabilité* $f(t)$ est équivalente à l'accélération $a(t)$.

  D'où : $p(0 \leq t \leq a) = \int_0^a f(t)\, dt$.

  La densité de probabilité est la variation instantanée de probabilité de X .

- **Conditions pour que $f(x)$ puisse être *densité de probabilité* de la variable aléatoire continue X** :
  - **Il faut $f(x) \geq 0$ pour tout x réel.**
  - **Il faut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = p(-\infty \leq X \leq +\infty) = 1$.**

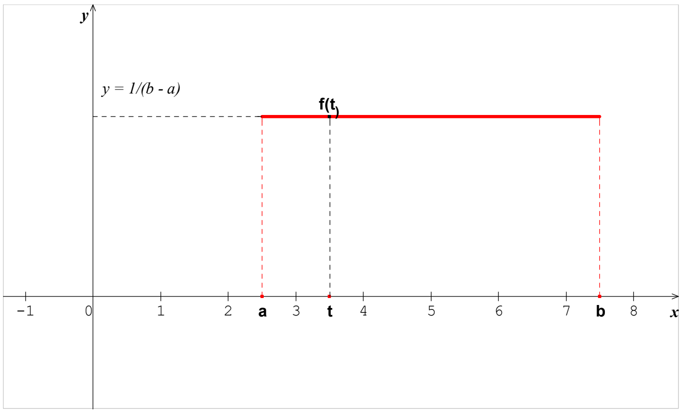
    Si X n'est définie que sur $[a\ ;\ b]$, cela signifie que $x < a$ ou $x > b \Rightarrow f(x) = 0$.

    Dans ce cas : $\int_a^b f(x)\, dx = 1$.

Loi de probabilité uniforme :

- **On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi uniforme* sur $[a\ ;\ b]$ si sa *densité de probabilité est constante* sur cet intervalle.**

  On a alors $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$ pour tout t tel que $a \leq t \leq b$. (Conséquence de $\int_a^b f(t)\,dt = 1$).



- Si X suit une loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout intervalle $[c\ ;\ d] \subset [a\ ;\ b]$: $p(c \leq X \leq d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

  Preuve : $p(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \dfrac{1}{b-a}\,dx = \dfrac{1}{b-a}\int_c^d 1\,dx = \dfrac{1}{b-a}\left[\,x\,\right]_c^d = \dfrac{1}{b-a} \times (d-c) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

- **Tout nombre pris au hasard sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ suit une loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$** (densité de probabilité identique sur l'ensemble de l'intervalle).

  Exemple d'utilisation :

  Sachant que le dépôt de plainte au commissariat n'est possible que de 8h00 à 16h00, quelle est la probabilité pour qu'une personne victime d'un vol, se présentant à un moment quelconque, puisse immédiatement déposer plainte ?

  Soit X l'heure de dépôt de la plainte.

  L'heure de dépôt étant aléatoire, elle suit une loi continue sur $[0\ ;\ 24]$.

  $p(8 \leq X \leq 16) = \dfrac{16-8}{24-0} = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3} = 0{,}33333\ ..$ (notation anglo-saxonne : $0{,}3333\overline{3}$).

- **Espérance mathématique d'une loi X uniforme sur $[a\ ;\ b]$:**

  A l'identique de $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,x_i$ pour une loi discrète, on sait que $E(X) = \int_a^b x.f(x)\,dx$ pour une loi continue.

  $E(X) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \dfrac{1}{b-a}\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_a^b = \dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{b^2}{2} - \dfrac{a^2}{2}\right) \Rightarrow \boldsymbol{E(X) = \dfrac{a+b}{2}}$.

- **Variance d'une loi X uniforme sur $[a\ ;\ b]$:**

  On sait que $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ avec $E(X^2) = \int_a^b x^2.f(x)\,dx = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \dfrac{1}{b-a}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_a^b = \dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{b^3}{3} - \dfrac{a^3}{3}\right)$.

  On sait $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$, d'où : $E(X^2) = \dfrac{b^2 + ab + a^2}{3}$.

  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \dfrac{b^2+2ab+a^2}{4} = \dfrac{b^2-2ab+a^2}{12}$, soit $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

  On déduit l'écart-type : $\sigma = \dfrac{|b-a|}{2\sqrt{3}}$.

Loi de probabilité exponentielle :

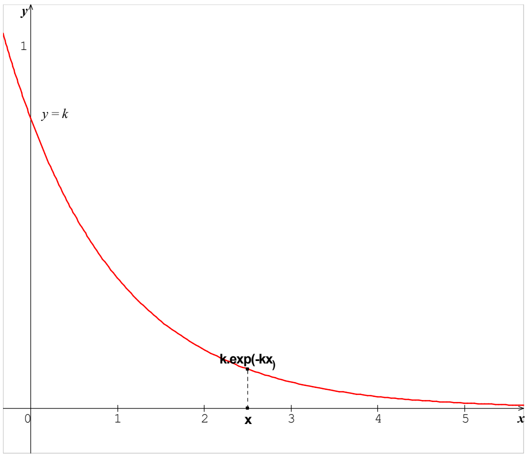
- **On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi exponentielle* de paramètre $\lambda > 0$ sur $[0\,;+\infty[$ si sa *densité de probabilité* est $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sur cet intervalle** (nulle sur $]-\infty\,;0]$) **.**

  Remarque : On a bien $f(x) > 0$ et $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)\,dx = 1$.

  En effet : $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-e^{-\lambda x}]_0^a = e^0 - e^{-\lambda a} = 1 - e^{-\lambda a}$.

  Comme $\lim\limits_{a \to +\infty} e^{-\lambda a} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, on déduit $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

- **Densité de probabilité $f(x) = ke^{-kx}$** ($k > 0$) :



Pour tout $x \geq 0$:

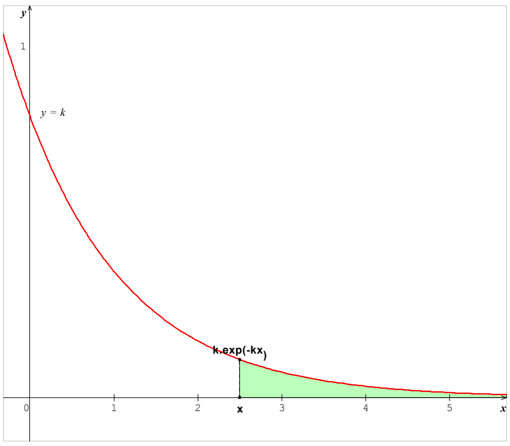
$p(0 \leq X \leq x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = e^0 - e^{-\lambda x}$, soit $\boldsymbol{p(0 \leq X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}}$.

$p(X = x) = \int_x^x f(t)\,dt = 0$,

$p(X \geq x) = 1 - p(0 \leq X \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})$, soit $\boldsymbol{p(X \geq x) = e^{-\lambda x}}$.

On constate un affaiblissement de la probabilité pour que X dépasse la valeur x , jusqu'à devenir nulle à l'infini.

$p(X \geq x)$ est l'aire sous la courbe représentative de f , au-delà de l'abscisse x .



$p(X \geq x)$

- $p(a \leq X \leq b) = p(X \leq a) - p(X \leq b)$, soit $\boldsymbol{p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}$.

- **Espérance mathématique d'une loi X exponentielle sur $[0\ ;+\infty[$, de paramètre $\lambda > 0$:**

  $E(X) = \int_0^{+\infty} t.f(t)\,dt = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^{a} t.f(t)\,dt = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^{a} \lambda t e^{-\lambda t}\,dt$.

  Intégration par parties : $\begin{cases} u = t \Rightarrow u' = 1 \\ v' = \lambda e^{-\lambda t} \Rightarrow v = -e^{-\lambda t} \end{cases}$ avec $\int_a^b uv'\,dt = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dt$.

  $\int_0^a \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = [te^{-\lambda t}]_0^a - \int_0^a (-e^{-\lambda t})\,dt = [te^{-\lambda t}]_0^a - [\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}]_0^a = ae^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda}$.

  Sachant $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, après changement de variable $x = -\lambda a$, on déduit :

  $E(X) = \int_0^{+\infty} t.f(t)\,dt = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^{a} t.f(t)\,dt = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^{a} \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$, soit $\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$.

- **Variance d'une loi X exponentielle sur $[0\ ;+\infty[$:**

  Une double intégration par parties permet de montrer que : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ avec $E(X^2) = \int_0^{+\infty} t^2.f(t)\,dt$, qui admet également pour résultat $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. On déduit l'écart-type : $\sigma = \frac{1}{\lambda}$.

- **Loi X exponentielle sur $[0\ ;+\infty[$, loi sans vieillissement :**

  Si une variable aléatoire suit une loi exponentielle, calculer la probabilité de $X \geq a + h$ sachant que $X \geq a$ est déjà réalisé, est identique à calculer la probabilité de $X \geq h$. (la durée a déjà réalisée n'influe pas sur le résultat, seul le complément importe).

Exemple : Durée de vie en heures d'une ampoule de paramètre λ .

$p(700 \leq X \leq 1000) = \int_{700}^{1000} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \int_0^{1000} \lambda e^{-\lambda t}\,dt - \int_0^{700} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = F(1000) - F(700).$

$p(700 \leq X \leq 1000) = (1 - e^{-1000\lambda}) - (1 - e^{-700\lambda}) = e^{-700\lambda} - e^{-1000\lambda} = e^{-700\lambda}(1 - e^{-300\lambda})$.

On retrouve : $p(700 \leq X \leq 1000) = p(X \geq 700) \times p(X \leq 300)$.

On peut aussi dire, en nommant A l'évènement $X \geq 700$ et B celui $X \geq 1000$:

$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) \Rightarrow p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(X \geq 1000)}{p(X \geq 700)} = \frac{e^{-1000\lambda}}{e^{-700\lambda}} = e^{-300\lambda} = p(X \geq 300)$.

On conclue : $p_{X \geq 700}(X \geq 1000) = p(X \geq 300)$.

La probabilité pour qu'une ampoule ait une durée de vie supérieure à 1000 h, sachant qu'elle a déjà vécu 700 h, est égale à sa probabilité initiale de vivre au moins 300 h.

Quelle que soit la durée de vie accomplie, la probabilité de vivre une certaine durée complémentaire reste toujours la même. Ce résultat permet de dire que la loi exponentielle est une *loi de probabilité sans vieillissement* .

Loi de probabilité normale centrée réduire $N(0\ ;\ 1)$:

- **On dit qu'une variable aléatoire T suit la *loi normale centrée réduite* $N(0\ ;\ 1)$ si sa *densité de probabilité* est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.**

  Remarque :

  La courbe représentative de f est une *courbe en cloche* (courbe de Gauss), symétrique par rapport à l'axe $y'y$ (fonction paire), dont les points d'inflexion (changement de courbure) sont aux abscisses -1 et +1 .

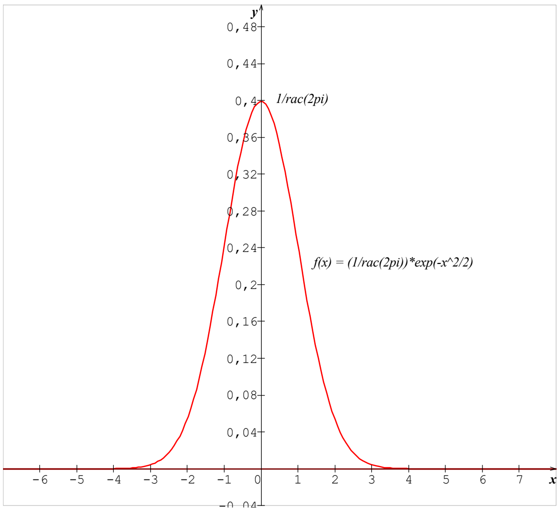
  Au niveau «Terminale » on ne peut pas calculer de primitive de f .

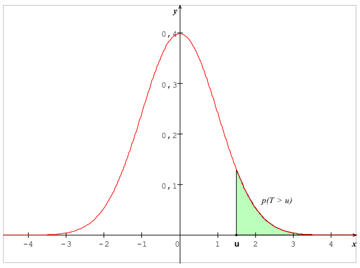
  On constate qu'en effet $f(x) > 0$ et on admettra $p(T \in\ ]-\infty\ ;\ +\infty[) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ (aire totale sous la courbe).

  $p(T \in\ ]-\infty\ ;\ 0]) = p(T \le 0) = \dfrac{1}{2}$ ainsi que $p(T \in [0\ ;\ +\infty[) = p(T \ge 0) = \dfrac{1}{2}$.

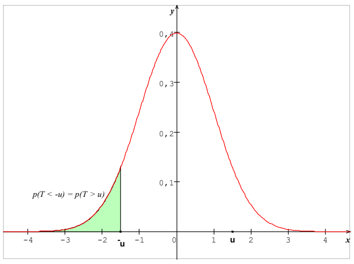
  $p(T \le -u) = 1 - p(T \ge u)$.

- **Densité de probabilité $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$:**

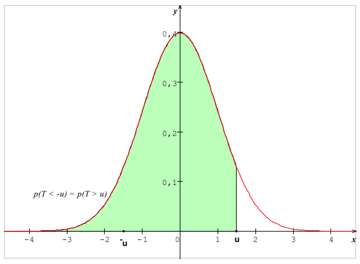




$p(T \ge u)$



$p(T \le -u) = p(T \ge u)$



$p(T \le u) = 1 - p(T \ge u)$

Les valeurs de $y = p(T \le u)$ et u tel que $p(T \le u) = y$ sont calculées à la calculatrice, par tableur, logiciel (loi normale).

Exemple :

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $N(0\ ;\ 1)$.

$p(0 \le X \le 1{,}3) = p(X \le 1{,}3) - p(X \le 0) = 0{,}903 - 0{,}5 = 0{,}403$ (utilisation de normCdf avec TI)

$p(-2{,}5 \le X \le 2{,}5) = 2\ p(0 \le X \le 2{,}5) = 2[p(X \le 2{,}5) - 0{,}5] = 2p(X \le 2{,}5) - 1 = 2 \times 0{,}994 - 1 = 0{,}988$.

- **Autres propriétés de la loi centrale réduite $N(0\,;1)$:**

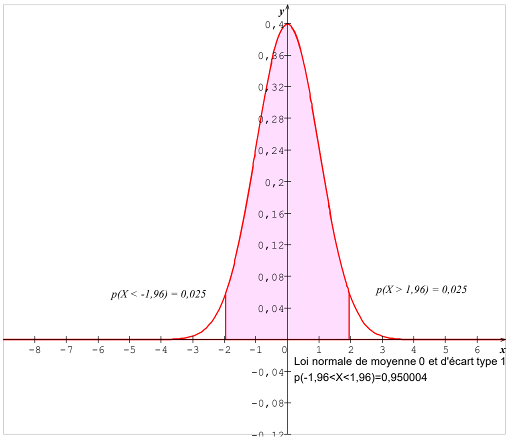
  Théorème du seuil u_α :

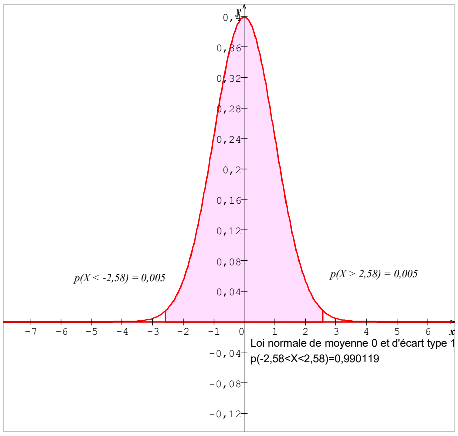
  Soit X une variable aléatoire qui suive la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.

  Pour tout réel $\alpha \in]0\,;1[$, il existe un réel positif unique u_α tel que $p(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1 - \alpha$.

  On doit savoir que $\begin{cases} u_{0,05} \approx 1{,}96 \ \text{, soit } p(-1{,}96 \le X \le 1{,}96) \approx 0{,}95 \\ u_{0,01} \approx 2{,}58 \ \text{, soit } p(-2{,}58 \le X \le 2{,}58) \approx 0{,}99 \end{cases}$.

  On dit aussi $\begin{cases} \text{Cas } \alpha = 5\% : \text{ Le nombre } u_{0,05} \text{ tel que } p(-u_{0,05} \le X \le u_{0,05}) = 0{,}95 \text{ et } u_{0,05} \approx 1{,}96 \\ \text{Cas } \alpha = 1\% : \text{ Le nombre } u_{0,01} \text{ tel que } p(-u_{0,01} \le X \le u_{0,01}) = 0{,}99 \text{ et } u_{0,05} \approx 2{,}58 \end{cases}$.





  L'espérance mathématique de la loi $N(0\,;1) = N(\mu = 0\,;\sigma^2 = 1)$ est $E(X) = \mu = 0$ (loi centrée).

  La variance de la loi $N(0\,;1) = N(\mu = 0\,;\sigma^2 = 1)$ est $V(X) = \sigma^2 = 1$ (loi réduite).

- **Théorème de Moivre –Laplace** : Approximation de la loi binomiale par la loi normale centrée réduite.

  On admet que : **Pour tout nombre entier n , si X_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B(n\,;p)$.**

  En posant $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$, variable centrée réduite associée à X_n , alors pour tous nombres réels a et b tels que $a < b$, la probabilité $p(a \le Z_n \le b)$ tend vers $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc lorsque le nombre d'expériences élémentaires devient très grand.

  On dit : $\lim\limits_{n \to +\infty} [\, p(a \le Z_n \le b)] = p(a \le X \le b)$ **avec X suivant la loi normale $N(0\,;1)$.**

  Dans la pratique, on remplace Z_n par X dès que $n \ge 30$, $np = E(X_n) \ge 5$ et $n(1-p) \ge 5$ (il n'y a plus à préciser *limite*).

Loi de probabilité normale $N(\mu\,;\sigma^2)$, d'espérance μ et d'écart-type σ :

- **Une variable aléatoire X suit la *loi normale* $N(\mu\,;\sigma^2)$ si la variable aléatoire $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $N(0\,;1)$.**

- **Propriété : Les intervalles σ , $2\,\sigma$, 3σ :**

  $p(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = p(-1 \le T \le 1) \approx 0{,}68$ (68% des résultats appartiennent à l'intervalle $[\mu - \sigma\,;\mu + \sigma]$.
  $p(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = p(-2 \le T \le 2) \approx 0{,}95$ (95% des résultats appartiennent à l'intervalle $[\mu - 2\sigma\,;\mu + 2\sigma]$.
  $p(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = p(-3 \le T \le 3) \approx 0{,}997$ (99,7% des résultats appartiennent à l'intervalle $[\mu - 3\sigma\,;\mu + 3\sigma]$.

- **Valeur de σ :** Plus σ est petit, plus la courbe en cloche s'affine et est plus haute.