

Montrons que : $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$

Soit u une fonction dérivable en $x = a$ et v une fonction dérivable en $y = u(a)$.

$$(v \circ u)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{v[u(x)] - v[u(a)]}{x - a},$$

$$(v \circ u)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{v[u(x)] - v[u(a)]}{u(x) - u(a)} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a}.$$

Remarques importantes :

Une fonction *dérivable* en un point est *continue* en ce point.
 La continuité en a est un préalable indispensable à la dérivabilité en a .
 Si la fonction n'est pas continue en a , elle ne peut pas y être dérivable.

Preuve :

f dérivable en $x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ calculable dans \mathbb{R} .

Lorsque x tend vers a , l'écart $x - a$ devient nul, ce qui rend la fraction incalculable Sauf si :
 si son numérateur devient lui-même nul (on a alors une forme *indéterminée*).

$\frac{4}{0}$ n'est pas calculable il n'existe pas de x réel tel que $x = \frac{4}{0}$, soit $0 \times x = 4$ (cas impossible).

Par contre :

$\frac{0}{0}$ est calculable, tout x réel étant solution : $x = \frac{0}{0} \Leftrightarrow 0 \times x = 0$, toujours vrai.

(cas indéterminé).

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ n'est calculable que s'il se met en *forme indéterminée*, donc que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

f continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Plus x se rapproche de a , plus $f(x)$ se rapproche de $f(a)$.

Il n'y a pas de *fracture* de la courbe représentative de f en $x = a$.

Retour à la dérivation de $v \circ u$:

v dérivable en $u(a)$ impose v continue en $u(a)$, soit $\lim_{y \rightarrow u(a)} v(y) = v[u(a)] \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow u(a)} (v(y) - v[u(a)]) = 0$.

Posons $y = u(x)$. On peut écrire $\lim_{x \rightarrow a} \frac{v[u(x)] - v[u(a)]}{u(x) - u(a)} = \lim_{y \rightarrow u(a)} \frac{v(y) - v[u(a)]}{y - u(a)} = v'[u(a)]$ calculable.

$$(v \circ u)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{v[u(x)] - v[u(a)]}{u(x) - u(a)} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = v'[u(a)] \times u'(a) = (v' \circ u)(a) \times u'(a),$$

$$(v \circ u)'(a) = [(v' \circ u) \times u'](a).$$

Conclusion :

$$\begin{cases} u \text{ dérivable en } x \\ v \text{ dérivable en } u(x) \end{cases} \Rightarrow v \circ u \text{ dérivable en } x ,$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$

$$(v \circ u)'(x) = (v' \circ u)(x) \times u'(x) = v'[u(x)] \times u'(x) .$$

Formule d'usage, bien qu'incorrecte :

$$[v(u)]' = v'[u] \times u' .$$

Exemple 1 :

$$\text{Soit } f(x) = (x^2 + x - 1)^2 .$$

$$f \text{ est la composée de } \begin{cases} u : x \rightarrow u(x) = x^2 + x - 1 \\ v : x \rightarrow v(x) = x^2 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 2x + 1 \\ v'(x) = 2x \end{cases} .$$

$$(v \circ u)(x) = v[u(x)] = v(x^2 + x - 1) = (x^2 + x - 1)^2 = f(x) .$$

$$f = v \circ u \Rightarrow f' = (v' \circ u) \times u' . \text{ (} u' \text{ est écrit en rouge pour inciter à ne jamais l'oublier).}$$

$$f'(x) = v'[u(x)] \times u'(x) = 2[u(x)] \times u'(x) = 2(x^2 + x - 1)(2x + 1) .$$

Méthode rapide :

$$f \text{ est de la forme } u^2 .$$

$$\text{On dérive comme pour } (x^2)' = 2x , \text{ sans oublier de multiplier par } u' .$$

$$f = u^2 \Rightarrow f' = 2u \times u' , \text{ soit } f'(x) = 2(x^2 + x - 1)(2x + 1) .$$

Exemple 2 :

$$\text{Soit } f(x) = \frac{1}{5x + 1} .$$

$$f \text{ est la composée de } \begin{cases} u : x \rightarrow u(x) = 5x + 1 \\ v : x \rightarrow v(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 5 \\ v'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{cases} .$$

$$(v \circ u)(x) = v[u(x)] = v(5x + 1) = \frac{1}{5x + 1} = f(x) .$$

$$f'(x) = v'[u(x)] \times u'(x) = -\frac{1}{(u(x))^2} \times u'(x) = -\frac{1}{(5x + 1)^2} \times 5 = -\frac{5}{(5x + 1)^2} .$$

Méthode rapide :

$$f \text{ est de la forme } \frac{1}{u} .$$

$$\text{On dérive comme pour } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} , \text{ sans oublier de multiplier par } u' .$$

$$f = \frac{1}{u} \Rightarrow f' = -\frac{1}{u^2} \times u' = -\frac{u'}{u^2} , \text{ soit } f'(x) = -\frac{5}{(5x + 1)^2} .$$

Exemple 3 :

$$\text{Soit } f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}.$$

$$f \text{ est la composée de } \begin{cases} u : x \rightarrow u(x) = x^3 + 2x^2 \\ v : x \rightarrow v(x) = \sqrt{x} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 3x^2 + 4x \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}.$$

$$(v \circ u)(x) = v[u(x)] = v(x^3 + 2x^2) = \sqrt{x^3 + 2x^2} = f(x).$$

$$f'(x) = v'[u(x)] \times u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}} \times (3x^2 + 4x) = \frac{(3x^2 + 4x)}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}}.$$

Méthode rapide :

f est de la forme \sqrt{u} .

On dérive comme pour $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, sans oublier de multiplier par u' .

$$f = \sqrt{u} \Rightarrow f' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \text{ soit } f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}}.$$

Formules à retenir :

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$