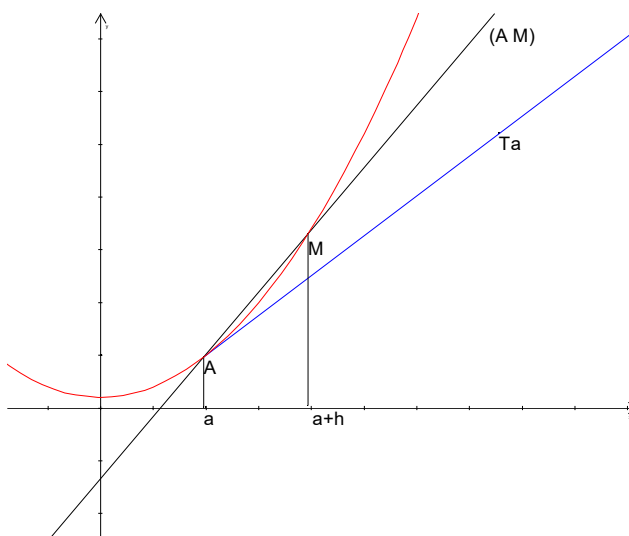


1^{ère} présentation :

La tangente T_a au point A de C_f d'abscisse a est la *position limite* des sécantes S_{AM} , lorsque l'abscisse $x = a + h$ du second point d'intersection M , revient vers a jusqu'à se confondre avec lui (h tend vers 0).

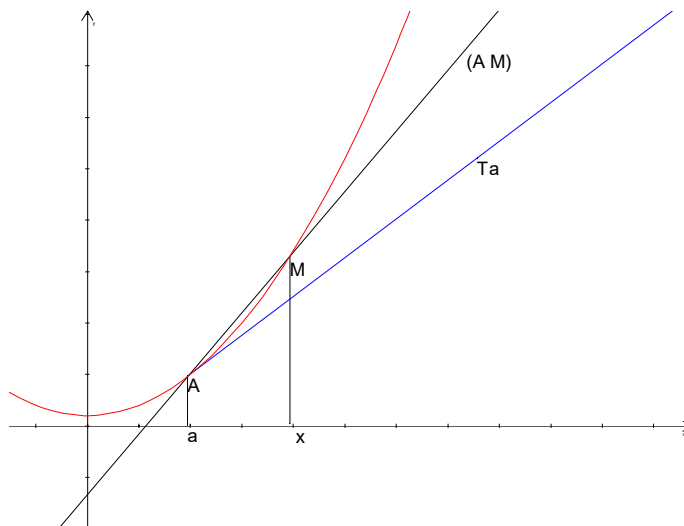


Son coefficient directeur est donné par le *nombre dérivé* de f en a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

2^{ème} présentation :

La tangente T_a au point A de C_f d'abscisse a est la *position limite* des sécantes S_{AM} , lorsque l'abscisse x du second point d'intersection M , revient vers a jusqu'à se confondre avec lui (x tend vers a).



Son coefficient directeur est donné par le *nombre dérivé* de f en a :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} .$$

Exemple 1 : Soit $f(x) = -x^2 + x + 2$.

Calculer $f'(3)$, nombre dérivé de f en $x = +3$, par les deux formules précédentes.

$$a) f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} :$$

$$f(3) = -(3^2) + 3 + 2 = -4 \text{ et } f(3+h) = -(3+h)^2 + (3+h) + 2.$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-(3+h)^2 + (3+h) + 2] - (-4)}{h} = \frac{-9 - 6h + h^2 + 3 + h + 2 + 4}{h},$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-5 + h) = -5 \text{ (Si } f \text{ est dérivable en } 3, \text{ il faut parvenir à simplifier par } h).$$

Remarque : Lorsqu'on travaille avec h , qui devient de plus en plus petit, l'usage est de classer des nombres de plus grand au plus petit ordre de grandeur, or h petit implique h^2 encore plus petit.

On écrira : $4 - 3h + 2h^2$ (le plus haut degré de h en dernier).

$$b) f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} :$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-x^2 + x + 2) - (-4)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + x + 6}{x - 3}.$$

Remarque : Si f est dérivable en $x = 3$, il faut diviser le numérateur par le dénominateur, ce qui signifie que le numérateur est multiple de $x - 3$.

On constate aisément que $-x^2 + x + 6$ admet $x_1 = 3$ et $x_2 = -2$ pour racines,

soit : $-x^2 + x + 6 = -(x - 3)(x + 2)$.

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (-x - 2) = -5.$$

La 1^{ère} méthode semble plus aisée.

Exemple 2 : Soit $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$.

Calculer $f'(x)$, nombre dérivé de f en x , par les deux formules précédentes.

$$a) f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} :$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(x+h)+2}{1-(x+h)} - \frac{x+2}{1-x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \times \left[\frac{(x+h)+2}{1-(x+h)} - \frac{x+2}{1-x} \right] \right),$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \times \frac{[(x+h)+2](1-x) - (x+2)[1-(x+h)]}{[1-(x+h)](1-x)} \right),$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \times \frac{x - x^2 + h - xh + 2 - 2x - x + x^2 + xh - 2 + 2x + 2h}{(1-x-h)(1-x)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \times \frac{3h}{(1-x-h)(1-x)} \right],$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{(1-x-h)(1-x)} = \frac{3}{(1-x)^2}.$$

On peut remarquer que $f'(x) = \frac{3}{(1-x)^2} > 0$. La fonction f est partout croissante.

$$b) f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} :$$

Par cette méthode, il faut toujours calculer en a et non directement en x , sinon on aurait une expression

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x} \frac{f(x) - f(x)}{x - x}, \text{ qui ne veut rien dire.}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x+2}{1-x} - \frac{a+2}{1-a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+2)(1-a) - (a+2)(1-x)}{(1-x)(1-a)(x-a)},$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - ax + 2 - 2a - a + ax - 2 + 2x}{(1-x)(1-a)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x - 3a}{(1-x)(1-a)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3(x-a)}{(1-x)(1-a)(x-a)},$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3}{(1-x)(1-a)} = \frac{3}{(1-a)^2}.$$

$$\text{On retrouve : } f'(x) = \frac{3}{(1-x)^2}.$$