A/ TAUX DE VARIATION – NOMBRE DÉRIVÉ $T_x = f'(x)$:

Le taux de variation T_x indique l'inclinaison (coefficient directeur ou pente) de la tangente à la courbe C_f représentative de l fonction f, en toute abscisse x de son domaine de définition.

La connaissance de T_x informe sur la croissance ou la décroissance de la fonction f lorsque x avance.

Le calcul de T_x se fait en deux temps :

a/ T*aux de variation $T_{x,x'}$ de la sécante au graphe (courbe représentative) entre ses points d'abscisse x et x'* :

Le taux de variation $T_{x,x'}$ est le coefficient directeur (pente) de la sécante $S_{MM'}$ au graphe de f, qui passe par les points M et M' de ce graphe, d'abscisses respectives x et x'.

Soient $M(x\,;y)$ et $M'(x'\,;y')$ deux points de C_f :

Etant sur ce graphe, leurs ordonnées vérifient $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

Le coefficient directeur (pente ou taux de variation) de la sécante $S_{MM'}$ est

$$T_{x,x'} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}.$$

Sauf cas particulier, il est *toujours possible* et même *indispensable*, de simplifier $x' - x$ entre le numérateur et le dénominateur du taux de variation de $S_{MM'}$.

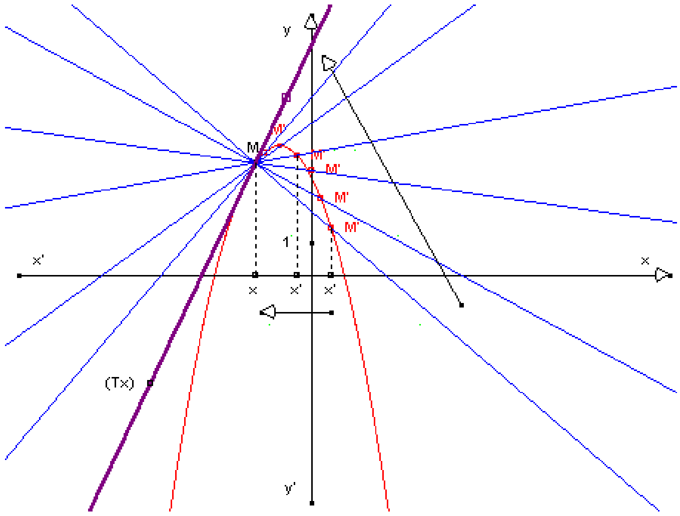
b/ *Après avoir simplifié*, on fait *évoluer* la sécante $S_{MM'}$ vers la tangente T_M en rapprochant le point M du point M', jusqu'à se confondre avec ce dernier.

Pour ce faire, on rapproche x' de x , puis on les confond.

L'expression obtenue, qui ne contient plus que des termes x est appelée *Taux de Variation de f en x*
Elle exprime le coefficient directeur T_x de la tangente en x à C_f .

T_x est noté $f'(x)$, nombre dérivé de f en x .

$$T_a = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$



Lorsque x' se rapproche de x on voit les sécantes $S_{MM'}$ remonter vers la tangente T_M. (notée T_x).

Exemple : Calcul du *Taux de Variation* de $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.

1/ Taux de variation de la sécante $S_{MM'}$:

$$T_{x,x'} = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{(-x'^2 + 3x' + 4) - (-x^2 + 3x + 4)}{x' - x} = \frac{-(x'^2 - x^2) + 3(x' - x)}{x' - x}$$, et en simplifiant par $x' - x$,

$\boldsymbol{T_{x,x'} = -(x' + x) + 3}$ **, pente de la sécante $S_{MM'}$ (coefficient directeur).**

On remarquera qu'en donnant des valeurs quelconques à x et à x', on obtient les *pentes* de toutes les sécantes possibles au graphe.

Ainsi la sécante passant par les points du graphe d'abscisses $x = -2$ et $x' = +3$ a pour coefficient directeur :

$\boldsymbol{T_{-2,+3} = -(3 - 2) + 3 = +2}$ **.**

2/ Taux de variation T_x (nombre dérivé $f'(x)$) de la tangente au graphe en son point d'abscisse x.

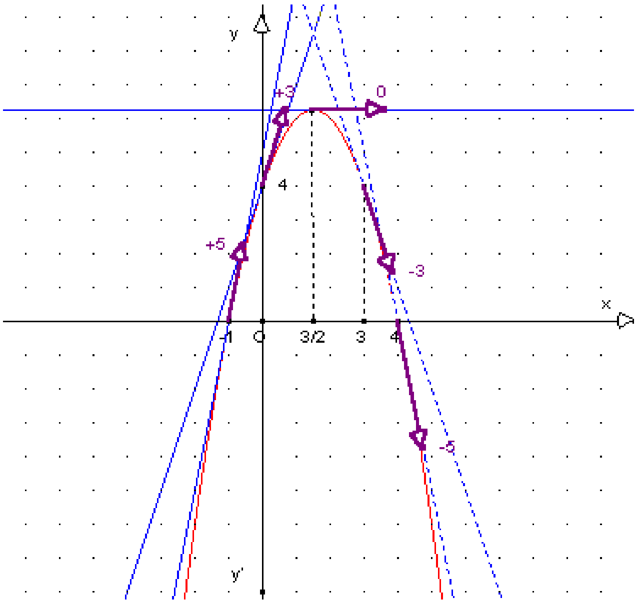
La tangente au graphe, en son point d'abscisse x, est la *position limite* des sécantes $S_{MM'}$, lorsque le deuxième point d'intersection M' revient sur M, jusqu'à se confondre avec lui.

On passe du coefficient directeur de la sécante $S_{MM'}$ à celui de la tangente T_M, en confondant x' avec x.

$\boldsymbol{T_x = -2x + 3}$ **, pente de la tangente T_M au point de C_f d'abscisse x. (*Taux de variation* de f en x)**

<u>Notation en dérivée</u> :

$f'(x) = -2x + 3$, qui indique le coefficient directeur de la tangente T_M en M, d'abscisse x à la courbe représentative C_f.



Exemples : **Sachant $f'(x) = -2x + 3$ pente de la tangente T_x**

Pour $x = -1$, on obtient $f'(-1) = +5$, la tangente en $x = -1$ **monte** de 5 en avançant de 1 .

Pour $x = 0$, on obtient $f'(0) = +3$, la tangente en $x = 0$ **monte** de 3 en avançant de 1 .

Pour $x = \frac{3}{2}$, on obtient $f'(\frac{3}{2}) = 0$, la tangente en $x = \frac{3}{2}$ est **horizontale**.

Pour $x = 3$, on obtient $f'(3) = -3$, la tangente en $x = 3$ **descend** de 3 en avançant de 1 .

Pour $x = 4$, on obtient $f'(4) = -5$, la tangente en $x = 4$ **descend** de 5 en avançant de 1 .

B/ SENS DE VARIATION de f :

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ est localement *croissante* autour de x

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ est localement *décroissante* autour de x

$T_x = f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ présente un *Extremum* (Maximum ou minimum) en x

ou un point d'inflexion (la tangente est alors horizontale)

Il faut chercher les éventuels *extrema* (sommets) et donner le signe du *taux de variation* suivant x, afin de dresser le tableau de variations.

a/ *Recherche de l'extremum* de C_f . C'est le point du graphe où la *tangente est de pente nulle.*

$\boldsymbol{T_x = f'(x) = 0} \Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = +\frac{3}{2}.$

L'extremum est situé sur C_f , donc son ordonnée vérifie $y = f(x) = f(\frac{3}{2}) = +\frac{25}{4}.$

L'extremum est $E\left(\frac{3}{2} ; \frac{25}{4}\right)$.

b/ *Signe du Taux de Variation (Dérivée)* :

S'il est positif, $f(x)$ croit avec x, sinon $f(x)$ décroit lorsque x croit.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$. **La fonction est croissante pour $x < \frac{3}{2}$, décroissante au delà.**

C/ TABLEAU DE VARIATION

C'est le résumé des résultats précédents. Il exprime l'évolution des *ordonnées* (hauteurs) $y = f(x)$ lorsque l'abscisse x avance de $-\infty$ vers $+\infty$.

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x) = T_x$		+	0	–	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$25/4$	↘	$-\infty$

D/ TRACE DE LA COURBE REPRESENTATIVE DE f (GRAPHE de f) :

Le tableau de variations inspire le graphe précédemment tracé. On peut calculer quelques points, sachant que $y = f(x)$.

Quelques dérivées utiles :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$