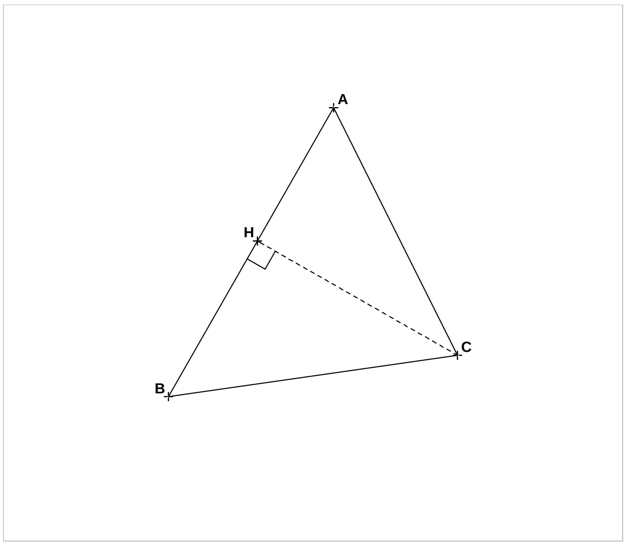
***Règle des Sinus* :**

Dans un triangle quelconque ABC non aplati :   Soit $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = (\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$, $\widehat{B} = (\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA})$, $\widehat{C} = (\overrightarrow{CA}\ ,\ \overrightarrow{CB})$. $$\boldsymbol{\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}}$$

***Preuve* :**



$$\textbf{Aire d'un triangle} = \frac{\textbf{Base} \times \textbf{Hauteur}}{\textbf{2}}$$

Aire du triangle ABC : $S = \dfrac{AB \times HC}{2}$ avec $\sin \widehat{B} = \dfrac{HC}{BC} \Leftrightarrow HC = BC \sin \widehat{B}$.

D'où : $S = \dfrac{AB \times BC \times \sin \widehat{B}}{2} = \dfrac{1}{2} ca \sin \widehat{B}$.

On obtiendrait de même : $S = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \dfrac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$.

$\dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \dfrac{1}{2} ca \sin \widehat{B} = \dfrac{1}{2} ab \sin \widehat{C} \Leftrightarrow bc \sin \widehat{A} = ca \sin \widehat{B} = ab \sin \widehat{C}$.

En divisant par abc : $\dfrac{\sin \widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin \widehat{C}}{c} \Leftrightarrow \boldsymbol{\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}}$.

***Relation triangulaire : (Al Kashi)* :**

Dans un triangle quelconque ABC non aplati :

Soit $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = (\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$, $\widehat{B} = (\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA})$, $\widehat{C} = (\overrightarrow{CA}\ ,\ \overrightarrow{CB})$.

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}}$$

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}}$$

***Preuve* :**

On sait que :

$$\| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 - 2\, \vec{u} \,.\, \vec{v}$$

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos (\vec{u}\ ;\ \vec{v})$$

Donc : $\begin{cases} \| \overrightarrow{BC} \|^2 = \| \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \|^2 = \| \overrightarrow{AC} \|^2 + \| \overrightarrow{AB} \|^2 - 2\, \overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{AB} = \| \overrightarrow{AC} \| \times \| \overrightarrow{AB} \| \times \cos (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}) \end{cases} \Rightarrow \ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$.

Les autres relations sont obtenues en permutant les rôles de a, b, c , $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.