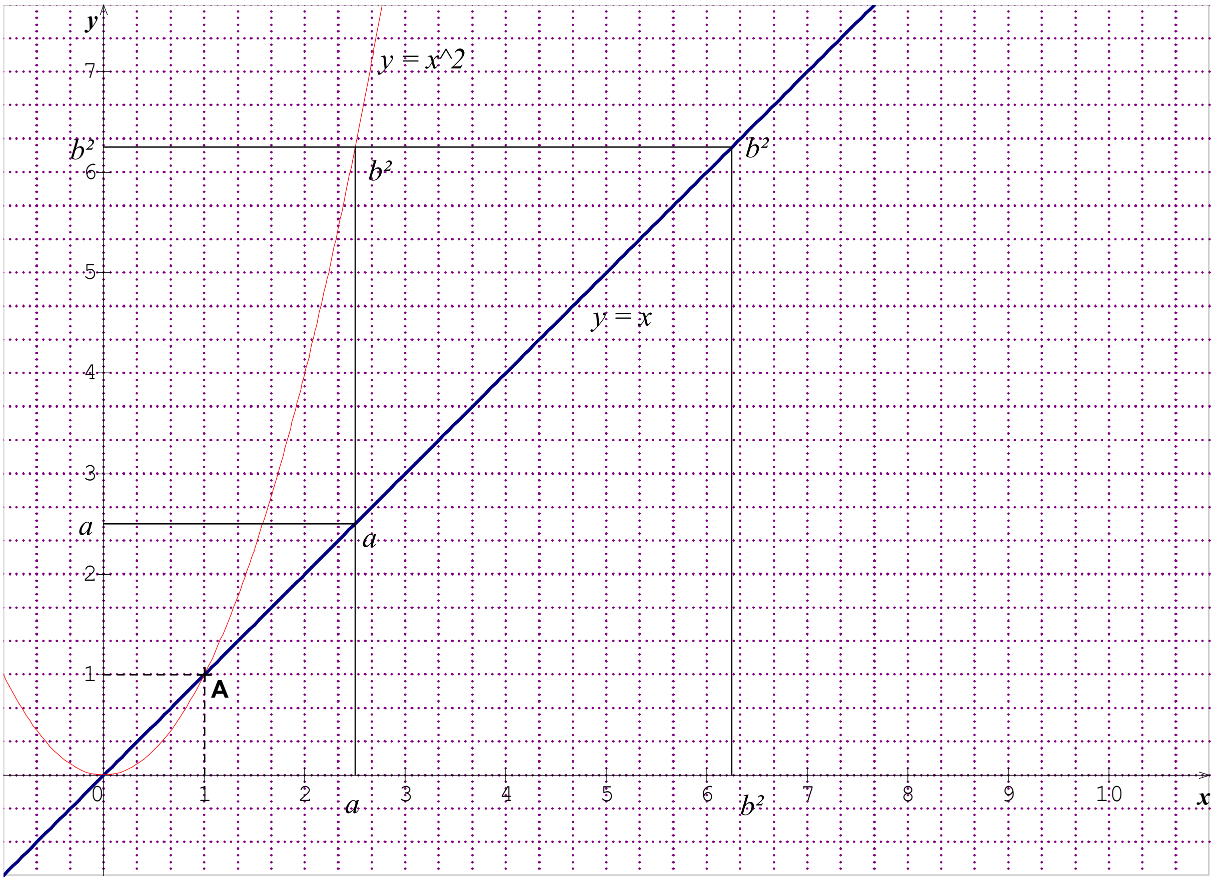


Points d'intersection entre la courbe représentative C_1 de $f(x) = x$ et celle C_2 de $g(x) = x^2$:

$\begin{cases} M(x\,;y) \in C_1 \Leftrightarrow y = f(x) = x \\ M(x\,;y) \in C_2 \Leftrightarrow y = g(x) = x^2 \end{cases}$, d'où : $x = x^2$.

$x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = +1 \end{cases}$.

$y = f(0) = g(0) = 0$ et $y = f(1) = g(1) = 1$.

Les seuls points communs aux deux courbes sont $\{O(0\,;0)\,, A(1\,;1)\}$.

Positions relatives de la courbe représentative C_1 de $f(x) = x$ et celle C_2 de $g(x) = x^2$:

1/ Soit $0 < a < 1$:

Soit $M(a\,;a)$ le point de la courbe C_1 d'abscisse a .

Soit $N(a\,;a^2)$ le point de la courbe C_2 d'abscisse a .

L'écart *algébrique* (avec signe) de C_1 vers C_2 est $y_N - y_M = a^2 - a = a(a-1)$.

$y_N - y_M = a(a-1)$.

Comme a est positif, on déduit que $a(a-1)$ est du signe de $a - 1$.

$0 < a < 1 \Rightarrow a - 1 < 0$.

Donc : sur $]0\,;1[$: $y_N - y_M < 0 \Leftrightarrow y_N < y_M$.

Sur l'intervalle $]0\,;1[$ la courbe représentative de la fonction $g(x) = x^2$ est partout *au dessous* de celle de la fonction $f(x) = x$.

2/ Soit $a > 1$:

Un raisonnement identique aboutit à $a > 1 \Rightarrow a - 1 > 0$.

Donc : sur $]1 ; +\infty[$: $y_N - y_M > 0 \Leftrightarrow y_N > y_M$.

Sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ la courbe représentative de la fonction $g(x) = x^2$ est partout *au dessus* de celle de la fonction $f(x) = x$.

Conclusion :

$\mathbf{0 < x < 1} \Leftrightarrow 0 < \mathbf{x^2 < x} < 1$: Entre 0 et 1 , mettre au carré un nombre *diminue* ce nombre, ainsi $0{,}8^2 = 0{,}64$, qui est inférieur à 0,80 . $x > 1 \Leftrightarrow 1 < \mathbf{x < x^2}$: Au delà de 1 , mettre au carré un nombre *augmente* ce nombre, ainsi $5^2 = 25$, qui est supérieur à 5 .

Sens de Variation de la fonction $\mathbf{g(x) = x^2}$ **:**

La courbe représentative C_2 permet de conjecturer que $g(x) = x^2$ est *strictement croissante* sur $[0 ; +\infty[$.

Preuve :

Soit $0 < a < b$. Etudions le signe de $b^2 - a^2$.

$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. Sachant $b + a > 0$, on déduit que $b^2 - a^2$ est du signe de $b - a$.

En conséquence : $0 < a < b \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow b^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

Conclusion :

$0 < a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. La fonction « *prendre la racine carrée* » est *strictement croissante* sur $[0 ; +\infty[$. On pourrait montrer qu'elle est *strictement décroissante* sur $]-\infty ; 0]$.

La fonction $\mathbf{g(x) = x^2}$ ***est-elle majorée lorsque x devient infini*** **?**

La courbe représentative C_2 permet de conjecturer que $g(x) = x^2$ n'est pas *majorée* sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, donc lorsque x tend vers $+\infty$.

Preuve : *(raisonnement par l'absurde)* .

Supposons qu'il existe un nombre réel $M > 0$ supérieur à tout carré, soit :

Pour tout $x > 0$: $x^2 \leq M$.

Prendre la *racine carrée* conserve les ordres des *nombres positifs*, soit :

$0 < a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

D'où : $x^2 \leq M \Leftrightarrow x \leq \sqrt{M}$.

Ceci est en contradiction avec le fait que l'inégalité de départ était supposée vraie pour tout x positif , donc x^2 n'est jamais majoré.

Conclusion :

Quel que soit le nombre réel $A > 0$, on peut toujours trouver un nombre $x > 0$, à partir duquel tout $x > A$ vérifie $x^2 > A$. On dit : *limite de* $x^2 = +\infty$ *lorsque* x *devient* $+\infty$, soit $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

La fonction $g(x) = x^2$ n'a-t-elle pas une croissance de plus en plus rapide ?

La courbe représentative C_2 permet de conjecturer que $g(x) = x^2$ est de plus en plus croissante lorsque x devient de plus en plus grand.

Preuve :

On va montrer que pour tout $a > 0$ et tout $h > 0$, l'accroissement de la fonction « mettre au carré » entre a et $a + h$ est plus grand qu'il ne l'est entre $a - h$ et a.

- L'accroissement de la fonction « mettre au carré » entre a et $a + h$ est $(a + h)^2 - a^2$.
- L'accroissement de la fonction « mettre au carré » entre $a - h$ et a est $a^2 - (a - h)^2$.

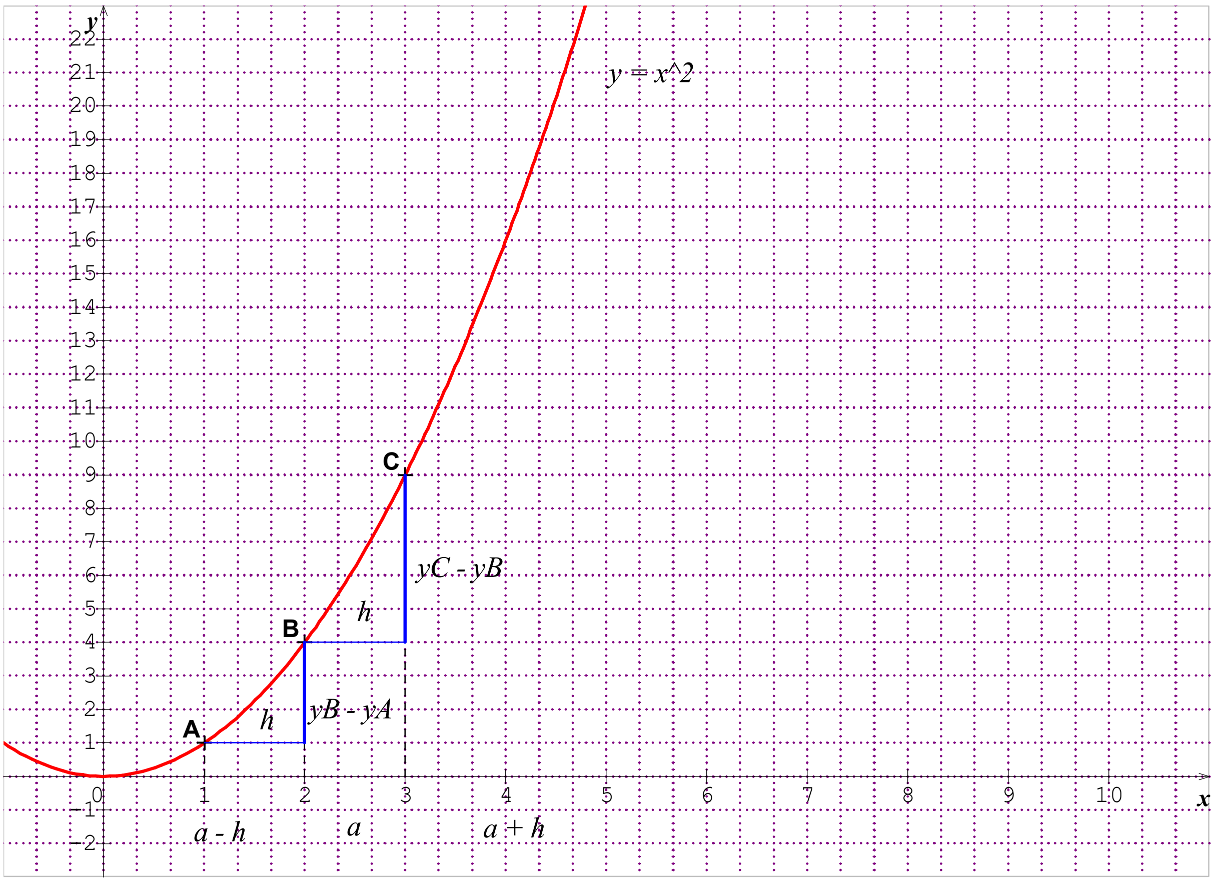
$(a + h)^2 - a^2 = [(a + h) - a][(a + h) + a] = h(2a + h)$.

$a^2 - (a - h)^2 = [a - (a - h)][a + (a - h)] = h(2a - h)$.

$a > 0$ et $h > 0 \Rightarrow 2a - h < 2a + h$, d'où : $h(2a - h) < h(2a + h)$.

On déduit : $a^2 - (a - h)^2 < (a + h)^2 - a^2$.

Pour une même augmentation d'abscisse de h, la fonction « mettre au carré » progresse plus de a à $a + h$, qu'elle n'avait progressé de $a - h$ à a.



Pour le même accroissement h, $y_C - y_B$ est plus grand que $y_B - y_A$.

***Les courbes représentatives de $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = x^2$* sont symétriques par rapport à la droite bissectrice des axes $y = x$.**

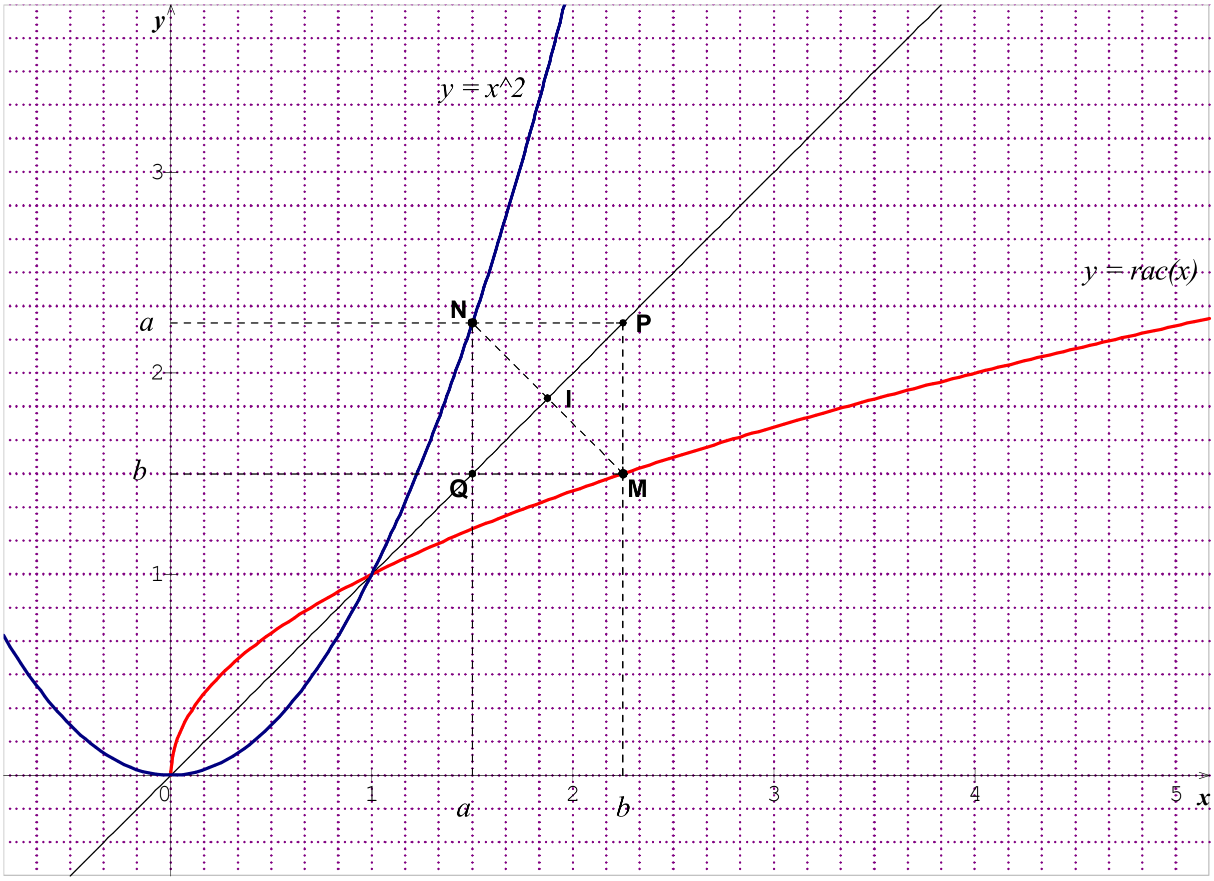
La figure ci-dessous semble en effet confirmer cette conjecture.

Montrons tout d'abord que le symétrique du point $N(x\,;y)$ par rapport à la droite $y = x$, est le point $M(x\,;y)$ (on intervertit les coordonnées).

Le quadrilatère $(MQNP)$ est un carré de côté $y - x$.

Ses diagonales sont donc égales et perpendiculaires en leur milieu I.

Donc I est le milieu de $[MN]$ et (MN) est perpendiculaire à (PQ), ce qui prouve que M est le symétrique du point N par rapport à la droite (PQ) d'équation $y = x$.



On remarquera que la démonstration précédente ne fait pas intervenir les courbes représentatives des fonctions « carré » et « racine ».

Supposons maintenant que le point $M(a\,;\,b)$ appartienne à la courbe C_3 *de* $y = x^2$.

Montrons que $N(b\,;\,a)$ appartient à la courbe C_2 de $y = \sqrt{x}$.

$M(a\,;\,b) \in C_3 \Leftrightarrow b = a^2 \Leftrightarrow \sqrt{b} = a \Leftrightarrow N(b\,;\,a) \in C_2$.

Sachant que le point $N(b\,;\,a)$ est le symétrique de $M(a\,;\,b)$ par rapport à $y = x$, on vient de montrer que la courbe représentative de $y = x^2$ est symétrique de celle de $y = \sqrt{x}$ par rapport à la droite $y = x$.