Si le polynôme $P(x)$ s'annule en $x = a$, il est possible de factoriser le binôme $x - a$.
$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a).Q(x)$
où $Q(x)$ est un polynôme de degré inférieur de 1 à celui de $P(x)$

Cas particulier d'un trinôme du second degré :

Soit le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: Deux racines distinctes α et β.

  On peut factoriser $(x - \alpha)$ et $(x - \beta)$, donc $(x - \alpha)(x - \beta)$.

  Développement : $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$.

  $P(x)$ admet a pour coefficient de son monôme du second degré x^2.

  Il faut multiplier la factorisation $(x - \alpha)(x - \beta)$ par a pour obtenir $P(x)$.

Si $\Delta > 0$: Deux racines distinctes α et β
$ax^2 + bx + c = \mathbf{a}(x - \alpha)(x - \beta)$

- Si $\Delta = 0$: Deux racines confondues $\alpha = \beta$.

  D'après le raisonnement précédent : $P(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x - \alpha)(x - \alpha) = a(x - \alpha)^2$.

  Un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 0$ est toujours synonyme de carré parfait $(x - \alpha)^2$.

Si $\Delta = 0$: Deux racines confondues $\alpha = \beta$
$ax^2 + bx + c = \mathbf{a}(x - \alpha)^2$

- Si $\Delta < 0$: Pas de racine.

  Aucune factorisation d'un facteur $(x - \alpha)$ n'est possible, sinon le trinôme admettrait α pour racine.

Si $\Delta < 0$: Pas de racine
Aucune factorisation de $ax^2 + bx + c$ n'est possible

Exemple 1 :

$3x^2 + 5x - 8$ admet $\alpha = +1$ et $\beta = -\frac{8}{3}$ pour racines.

D'où : $3x^2 + 5x - 8 = \mathbf{3}(x - 1)(x + \frac{8}{3}) = (x - 1)(3x + 8)$.

Remarque : Si le polynôme initial ne comporte pas de fraction, il est toujours possible de distribuer le coefficient a sur un ou plusieurs facteurs, pour obtenir une factorisation sans fractions.

Ainsi : $6x^2 - x - 1 = \mathbf{6}(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{3}) = (2x - 1)(3x + 1)$.

Exemple 2 :

$5x^2 + 20x + 20$ admet $\alpha = \beta = -2$ pour racine double.

D'où : $5x^2 + 20x + 20 = \mathbf{5}(x + 2)^2$.

Exemple 3 :

$2x^2 + x + 3$, de $\Delta = -23 < 0$ n'admet pas de racine, donc n'est pas factorisable.

<u>*Méthode par Identification de Polynômes, applicable à tous les degrés*</u> :

Si le polynôme $P(x)$ s'annule en $x = a$, il est possible de factoriser le binôme $x - a$.

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a).Q(x)$$

où $Q(x)$ est un polynôme de degré inférieur de 1 à celui de $P(x)$

Exemple 1 :

$3x^2 + 5x - 8$ s'annule pour $x = +1$ (racine évidente)

D'après le théorème précédent : $3x^2 + 5x - 8 = (x - 1)(ax + b)$ pour tout x réel.

$3x^2 + 5x - 8 = ax^2 + bx - ax - b$,

$3x^2 + 5x - 8 = ax^2 + (b - a)x - b$, pour tout x réel.

<u>Identification</u> : Deux polynômes égaux pour toute valeur réelle x (identiques), ont le même coefficient pour chacun de leurs monômes (degrés de x)

- On remarquera que dire que deux polynômes sont *identiques* signifie qu'ils donnent un même résultat pour toutes les valeurs réelles de x .
  (motif pour qu'ils adoptent la même écriture pour chaque degré de x).

- Par contre, deux polynômes peuvent être *égaux* pour quelques valeurs de x , sans l'être pour toutes, et ils ne sont pas *identiques*, donc n'adoptent pas la même écriture.

$$3x^2 + 5x - 8 = ax^2 + (b - a)x - b \text{ , pour tout } x \text{ réel } \Rightarrow \begin{cases} a = +3 \\ b - a = +5 \\ -b = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = +3 \\ b = +8 \end{cases} .$$

Remarquer que l'équation $b - a = +5$ n'a pas été utilisée pour déterminer a et b .

Il est cependant souhaitable de vérifier que les résultats obtenus satisfont cette équation.

Conclusion : $3x^2 + 5x - 8 = (x - 1)(3x + 8)$.

Exemple 2 :

Le polynôme $P(x) = x^3 - x - 6$ vérifie $P(+2) = 0$ (racine évidente $x = +2$).

On peut donc factoriser $x - 2$:

$P(x) = (x - 2).Q(x)$ avec $\deg Q = (\deg P) - 1 = 2$.

$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ pour tout x réel.

Après développement et réduction selon chaque degré de x :

$P(x) = x^3 - x - 6 = ax^3 + (-2a + b)x^2 + (-2b + c)x - 2c$.

Identification des polynômes : $\begin{cases} a = +1 \\ -2a + b = 0 \\ -2b + c = -6 \\ -2c = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = +1 \\ b = +2 \\ c = +3 \end{cases}$.

$P(x) = x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$, pour tout x réel.

Cas particulier : Racines évidentes $x = +1$ *ou* $x = -1$ *pour un trinôme du second degré* :

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$.

$P(+1) = 0$ (racine évidente $x = +1$) $\Leftrightarrow$ $a(1)^2 + b(1) + c = 0$ $\Leftrightarrow$ $a + b + c = 0$.

$P(x) = ax^2 + bx + c = (x - 1)(Ax + B) = Ax^2 + (B - A)x - B \Rightarrow \begin{cases} A = a \\ B - A = b \\ -B = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = a \\ B = -c \end{cases}$.

$P(x) = ax^2 + bx + c = (x - 1)(ax - c)$ de racines $\begin{cases} x' = +1 \\ x'' = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$: *Racine évidente* $x = +1$
$a + b + c = 0 \Leftrightarrow$ Racines $\begin{cases} x' = +1 \\ x'' = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

$3x^2 - x - 2$ vérifie $a + b + c = 0$, donc admet $x' = +1$ et $x'' = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{2}{3}$ pour racines.

De même :

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$: *Racine évidente* $x = -1$
$a - b + c = 0 \Leftrightarrow$ Racines $\begin{cases} x' = -1 \\ x'' = -\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

$4x^2 - x - 5$ vérifie $a - b + c = 0$, donc admet $x' = -1$ et $x'' = -\dfrac{c}{a} = +\dfrac{5}{4}$ pour racines.

<u>Factorisation par le schéma de Hörner</u> :

a) <u>Valeur d'un polynôme pour un x réel donné</u> :

Soit $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$. Calculons $P(-2)$.

Positionner les coefficients du polynôme sur la première ligne, et la valeur de x utilisée sur la 2ème ligne,
Reporter le 1er coefficient $a = +2$ en 3ème ligne :

	2	-5	4	-7
-2				
	2			

Multiplier $x = -2$ par le coefficient $a = +2$, soit -4 , que l'on reporte en ligne 2 , colonne suivante,
additionner au coefficient suivant $b = -5$, soit $-5 + (-4) = -9$:

	2	-5	4	-7
-2		**-4**		
	2	-9		

Réitérer avec la colonne suivante : $x = -2$ multiplié par le résultat -8, soit +18 , reporté en ligne 2,
Addition avec le coefficient $c = +4$, soit $18 + 4 = 22$:

	2	-5	4	-7
-2		-4	**18**	
	2	**-9**	22	

Réitérer avec la colonne suivante : $x = -2$ multiplié par le résultat 22, soit -44 , reporté en ligne 2,
Addition avec le dernier coefficient $d = -7$, soit $-44 + (-7) = -51$, valeur du polynôme en $x = -2$:

	2	-5	4	-7
-2		-4	18	**-44**
	2	-9	**22**	***P*** **(-2) = -51**

b) Vérification de Racines Evidentes - Factorisation de Polynômes :

Après avoir vérifié $P(\alpha) = 0$, la dernière ligne donne le polynôme à multiplier par $(x - \alpha)$.

***Exemple* :**

Soit $P(x) = 6x^3 - 11x^2 - 17x + 30$.

Vérifier que $x = +2$ est racine de $P(x) = 0$, puis factoriser $P(x)$.

	6	-11	-17	30
2		12	2	-30
	6	**1**	**-15**	***P* (2) = 0**

d'où $P(x) = 6x^3 - 11x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(6x^2 + x - 15)$, ce qui se vérifie aisément.

Méthode par division de polynômes : Même principe, mais présentée comme une division habituelle.

Pour obtenir $6x^3$, multiplier le diviseur $x - 2$ par $6x^2$.

Soustraire à gauche le produit $\mathbf{6x^2}(x - 2)$, soit ajouter $-6x^2 + 12x$.

Résultat x^2 .

$$
\begin{array}{r|l}
\mathbf{6x^3 - 11x^2 - 17x + 30} & \mathbf{x - 2} \\ \cline{2-2}
\underline{-6x^2 + 12x^2} & \mathbf{6x^2} \\
x^2 &
\end{array}
$$

On descend la colonne $-17x$.

Réitérer la méthode précédente :

$\mathbf{x}(x - 2) = x^2 - 2x$.

Ajouter $-x^2 + 2x$ à gauche

Résultat $-15x$.

$$
\begin{array}{r|l}
\mathbf{6x^3 - 11x^2 - 17x + 30} & \mathbf{x - 2} \\ \cline{2-2}
-6x^2 + 12x^2 & 6x^2 + \mathbf{x} \\
x^2 - 17x & \\
\underline{-x^2 + 2x} & \\
-15x &
\end{array}
$$

On descend la colonne 30 .

Réitérer la méthode précédente :

$\mathbf{-15}\ (x - 2) = -15x + 30$.

Ajouter $15x - 30$ à gauche

Résultat 0 .

$$
\begin{array}{r|l}
\mathbf{6x^3 - 11x^2 - 17x + 30} & \mathbf{x - 2} \\ \cline{2-2}
-6x^2 + 12x^2 & 6x^2 + x\ \mathbf{- 15} \\
x^2 - 17x & \\
-x^2 + 2x & \\
-15x + 30 & \\
\underline{-15x + 30} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$\mathbf{6x^3 - 11x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(6x^2 + x - 15)}$$

Méthode par calcul mental :

C'est la méthode par *identification*, mais par calculs successifs, mentalement :

Soit $P(x) = 6x^3 - 11x^2 - 17x + 30$.

On vérifie que $P(+2) = 0$ (racine évidente) .

$x - 2$ se factorise :

$P(x) = \mathbf{6x^3} - 11x^2 - 17x + 30$:

Pour obtenir $6x^3$, il faut multiplier $x - 2$ par $6x^2$:

$6x^3 - 11x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(\mathbf{6x^2} \ldots\ldots)$.

$(x - 2)(6x^2) = 6x^3 - 12x^2$.

On a simultanément créé un second produit $-12x^2$, qui va être maintenant pris en compte.

$P(x) = 6x^3 \mathbf{- 11x^2} - 17x + 30$:

A partir de $-12x^2$, pour obtenir $-11x^2$, il faut créer un terme $+x^2$: $-12x^2 + x^2 = -11x^2$.

Pour créer ce terme x^2, il faut multiplier $x - 2$ par x :

$6x^3 - 11x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(6x^2 \mathbf{+ x} \ldots\ldots)$.

$(x - 2)(x) = x^2 - 2x$.

On a simultanément créé un second produit $-2x$, qui va être maintenant pris en compte.

$P(x) = 6x^3 - 11x^2 \mathbf{- 17x} + 30$:

A partir de $-2x$, pour obtenir $-17x$, il faut créer un terme $-15x$: $-15x - 2x = -17x$.

Pour créer ce terme $-15x$, il faut multiplier $x - 2$ par -15 :

$6x^3 - 11x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(6x^2 + x \mathbf{- 15})$.

$(x - 2)(-15x) = -15x \mathbf{+ 30}$.

Ce second produit $+30$ complète la factorisation.

$\boldsymbol{P(x) = 6x^3 - 11x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(6x^2 + x - 15)}$ **.**