Un trinôme du second degré en x est une expression de forme $ax^2 + bx + c$, telle que $a \neq 0$.

$2x^2 + x - 2$, $-x^2 + 7$, $5x^2 + x$ sont des trinômes du second degré.

On appelle *discriminant* du trinôme $ax^2 + bx + c$ l'expression (delta) $\Delta = b^2 - 4ac$.

Pour $2x^2 + x - 2$: $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-2) = 17$.

Pour $-x^2 + 7$: $\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(-1)(7) = 28$.

On appelle *racine* du trinôme toute valeur de x qui annule le trinôme.

$x = -1$ est racine de $x^2 - 2x - 3$: $(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

$x = +2$ est racine de $x^2 - 4$: $(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

Le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ détermine le nombre de racines du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- **Si $\Delta > 0$:** **Le trinôme admet deux racines distinctes, de valeur** $\left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}\right.$.

- **Si $\Delta = 0$:** **Le trinôme admet deux racines confondues, de valeur $x' = x'' = -\dfrac{b}{2a}$** .

  On dit qu'il admet une *racine double* (reporter dans les valeurs du cas précédent pour constater que l'on obtient deux fois $-\dfrac{b}{2a}$).

- **Si $\Delta < 0$:** **Le trinôme n'admet pas de racine.**

  Quelle que soit la valeur de x reportée dans $ax^2 + bx + c$, le résultat n'est jamais nul.

Exemple 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x^2 + x - 4 = 0$

$a = +3$, $b = +1$, $c = -4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (+1)^2 - 4(+3)(-4) = 1 + 24 = +25 > 0$

Le trinôme admet deux racines distinctes $\left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x' = -\dfrac{1 - \sqrt{25}}{2(+3)} = \dfrac{-1 - 5}{6} = -\dfrac{6}{6} = -1 \\ x'' = -\dfrac{-1 + \sqrt{25}}{2(+3)} = \dfrac{-1 + 5}{6} = \dfrac{4}{6} = +\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

$S = \{ -1 ; +\dfrac{2}{3} \}$.

Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 + 4x + 4 = 0$

$a = +1$, $b = +4$, $c = +4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (+4)^2 - 4(+1)(+4) = 36 - 36 = 0$

Le trinôme admet deux racines confondues (racine double) $x' = x'' = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2} = -2$.

$S = \{-2\}$.

Exemple 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 + x + 1 = 0$

$a = +2$, $b = +1$, $c = +1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (+1)^2 - 4(+2)(+1) = 1 - 8 = -7 < 0$

Le trinôme n'admet pas de racine, donc n'est nul pour aucune valeur réelle de x .