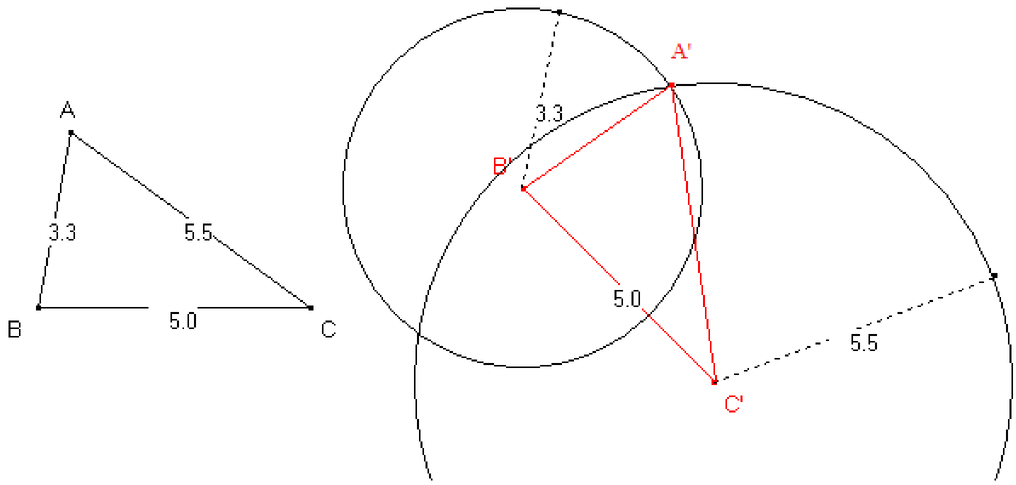
Triangles Isométriques : (ou égaux)

1er cas d'égalité :

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux si et seulement s'ils possèdent trois côtés respectivement égaux



a) On trace $B'C'$ de même longueur que BC.

b) On trace le cercle de centre B' de rayon égal à BA.

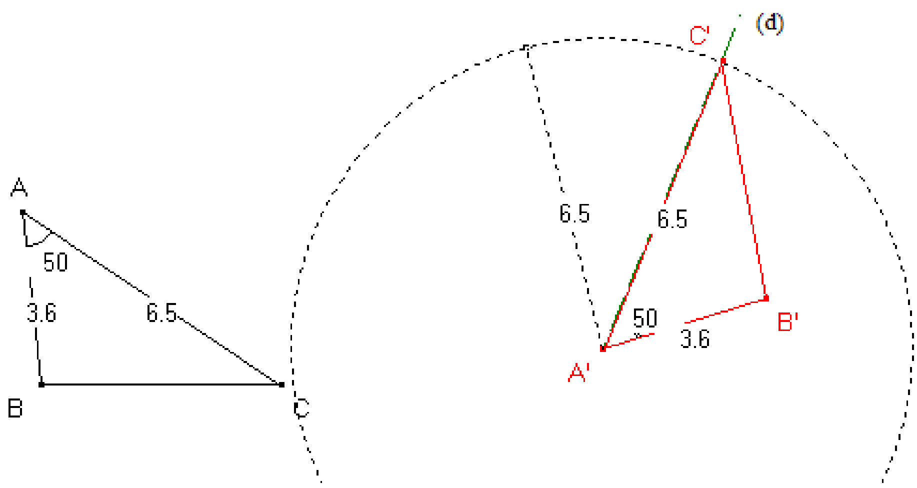
c) On trace le cercle de centre C' de rayon égal à CA.

d) Ces deux cercles se coupent en deux points, dont l'un est choisi comme A'.

On constate que le triangle $A'B'C'$ est isométrique au triangle ABC.

2ème cas d'égalité :

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux si et seulement s'ils possèdent un angle égal encadré par deux côtés respectivement égaux



a) On trace $A'B'$ de même longueur que AB .

b) A l'aide d'un rapporteur, on trace une demi-droite $[A'd)$ telle qu'elle fasse un angle avec $A'B'$ égal à $\widehat{BAC}$.

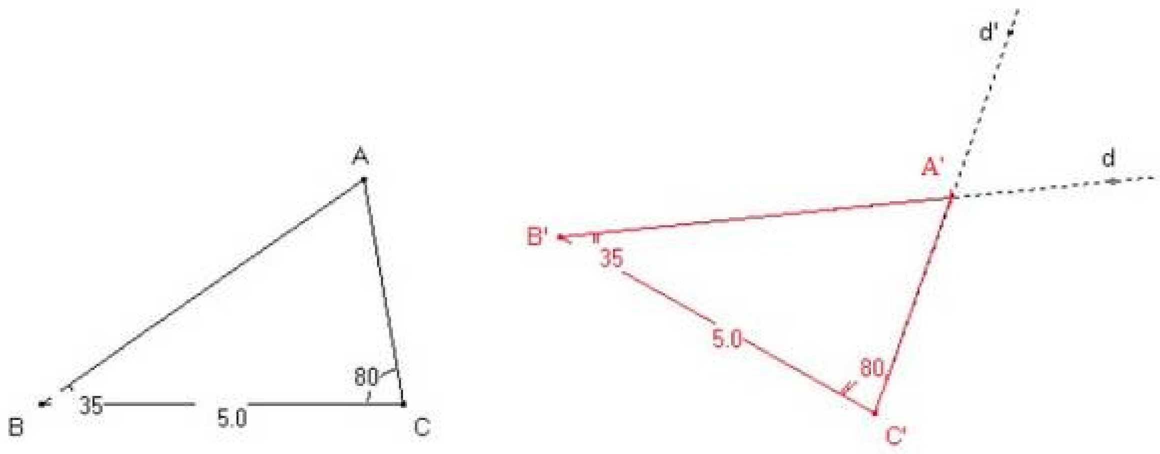
c) On trace le cercle de centre A' de rayon égal à AC .

d) Ce cercle coupe la demi-droite $[A'd)$ au point C' .

On constate que le triangle $A'B'C'$ est isométrique au triangle ABC .

3ème cas d'égalité :

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux si et seulement s'ils possèdent un côté égal adjacent (qui touche) à deux angles respectivement égaux



a) On trace $B'C'$ de même longueur que BC .

b) A l'aide d'un rapporteur, on trace une demi-droite $[B'd)$ telle qu'elle fasse un angle avec $B'C'$ égal à $\widehat{ABC}$.

c) On trace une 2ème demi-droite $[C'd')$ telle qu'elle fasse un angle avec $B'C'$ égal à $\widehat{ACB}$.

d) Ces deux demi-droites se coupent au point A' .

On constate que le triangle $A'B'C'$ est isométrique au triangle ABC .

Remarque :

Noter l'évolution des énoncés des cas d'égalité :

1er cas : 3 côtés égaux – 0 angle égal : $3 + 0 = 3$.

2ème cas : 2 côtés égaux – 1 angle égal : $2 + 1 = 3$.

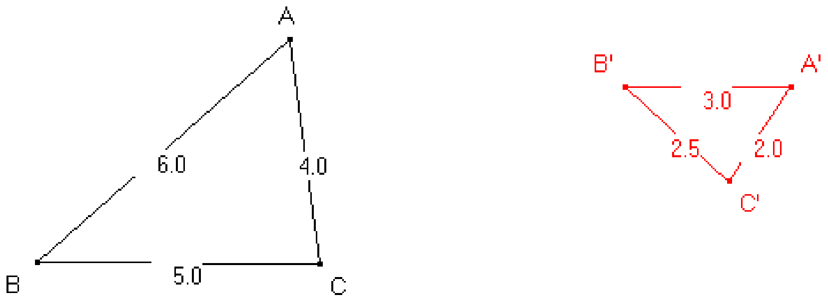
3ème cas : 1 côté égal – 2 angles égaux : $1 + 2 = 3$.

<u>Triangles Semblables :</u> (ou proportionnels)

1er cas de similitude :

Deux <u>triangles</u> ABC et $A'B'C'$ sont <u>semblables</u> si et seulement s'ils possèdent <u>trois côtés respectivement proportionnels</u> $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$.

k est appelé le *rapport de proportionnalité* ou *rapport d'agrandissement*.



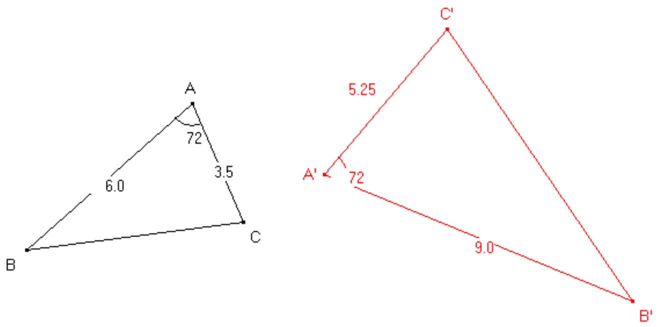
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{6}{3} = 2\ ,\ \frac{AC}{A'C'} = \frac{4}{2} = 2\ ,\ \frac{BC}{B'C'} = \frac{5}{2{,}5} = 2$$

$k = 2$ (agrandissement) pour passer de $A'B'C'$ à ABC

$k' = \frac{1}{2}$ (réduction) pour passer de ABC à $A'B'C'$.

2ème cas de similitude :

Deux <u>triangles</u> ABC et $A'B'C'$ sont <u>semblables</u> si et seulement s'ils possèdent <u>un angle égal</u> compris entre <u>deux côtés respectivement proportionnels</u> $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = k$.



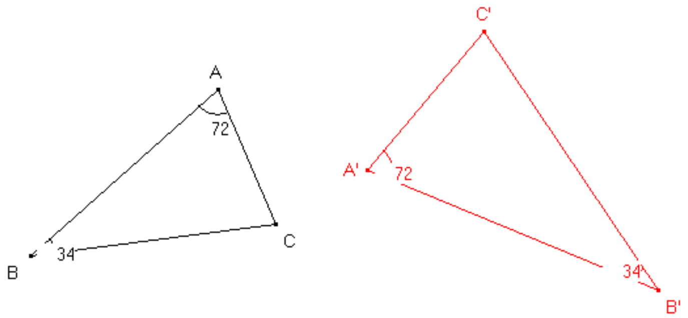
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}\ ,\ \frac{AC}{A'C'} = \frac{3{,}5}{5{,}25} = \frac{2}{3} \text{ et } \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} = 72°$$

$k = \frac{2}{3} = 0{,}66..$ (réduction d'un tiers) pour passer de $A'B'C'$ à ABC

$k' = \frac{3}{2} = 1{,}5$ (agrandissement de moitié) pour passer de ABC à $A'B'C'$.

3ème cas de similitude :

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement s'ils possèdent deux angles respectivement égaux .



$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} = 72° \text{ et } \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} = 34°$$

Les troisièmes angles sont aussi égaux puisque la somme des angles est 180°

Le rapport de proportionnalité se calcule par $k = \frac{AB}{A'B'}$, valable aussi pour les autres côtés.

Remarque : *Celle faite pour les triangles égaux reste valable* ….. mais :

Noter l'évolution des énoncés des cas de similitude :

1er cas : 3 côtés proportionnels – 0 angle égal : $3 + 0 = 3$.

2ème cas : 2 côtés proportionnels – 1 angle égal : $2 + 1 = 3$.

3ème cas : 1 côté proportionnel – 2 angles égaux : $1 + 2 = 3$.

Dans le 3ème cas, nous n'avons en fait pas demandé 1 côté respectivement proportionnel, car 2 côtés, un dans chaque triangle, forment toujours une proportion, que l'on a pas besoin ici de vérifier pour deux autres côtés.

Le seul intérêt d'en parler est que ce rapport donne le facteur d'agrandissement : $k = \frac{AB}{A'B'}$.