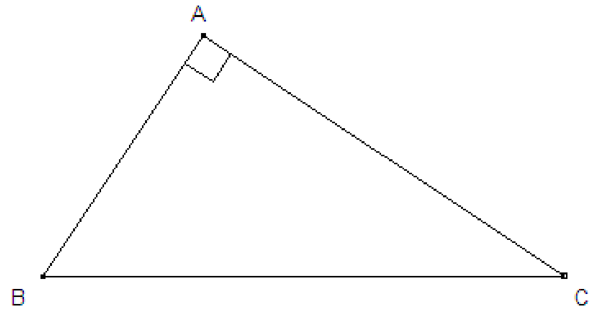
Théorème de Pythagore :

Si un triangle ABC est *rectangle* en A, alors :

La somme des carrés des côtés de l'angles droit est égale au carré de l'hypoténuse, soit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$



Exemple :

Le triangle ABC ci-dessus vérifie $\begin{cases} AB = 6 \text{ cm} \\ AC = 8 \text{ cm} \end{cases}$. Calculer la longueur de l'hypoténuse $[BC]$.

D'après le théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A, donc vérifie : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

D'où : $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 6\times6 + 8\times8 = 36 + 64 = 100$.

$BC^2 = 100 = 10\times10 = 10^2$. On déduit que $BC = 10$ cm.

Réciproque du théorème de Pythagore :

Inversement

Soit un triangle ABC dont le plus grand côté est BC

Si le triangle vérifie : $BC^2 = AB^2 + AC^2$,

alors : Le triangle ABC est rectangle en A.

Exemple :

Le triangle ABC ci-dessus vérifie $\begin{cases} AB = 3 \text{ cm} \\ AC = 4 \text{ cm} \\ BC = 5 \text{ cm} \end{cases}$. Prouver que ce triangle est rectangle en A.

On sait que si le triangle ABC *vérifie la réciproque du théorème de Pythagore*, il est rectangle.

Il suffit de montrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ pour qu'il soit rectangle en A.

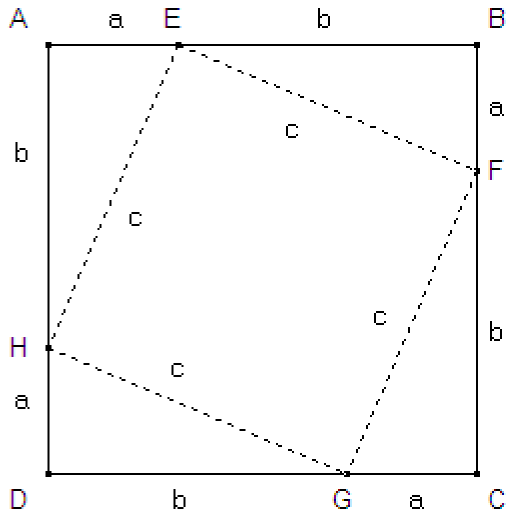
$\left\{ \begin{array}{c} AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 3\times3 + 4\times4 = 9 + 16 = 25 \\ \text{et} \\ BC^2 = 5^2 = 5\times5 = 25 \end{array} \right\}$ ce qui prouve que le triangle ABC est rectangle en A.

Pour information :

Démonstration géométrique du théorème de Pythagore :

***Pythagore* : Grec, environ 550 avant J.C.** (pas d'électricité, pas de voitures automobiles, pas d'Internet, pas de MP3, pas de téléphone portable à cette époque …. Mais des idées ….)

Soit le carré $ABCD$ suivant, sur les côtés duquel on reporte les longueurs a et b comme ci-dessous :



On constate que le quadrilatère $EFGH$ est un carré, de côté c (il faut raisonner sur la valeur des angles et la longueur des côtés pour le prouver).

Autour de ce carré viennent en complément *quatre* triangles rectangles identiques à AEH.

- L'aire A_1 (surface) du grand carré $ABCD$ est $AB \times AD = (a + b)\times(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- L'aire A_2 du petit carré $AFGH$ est $EF \times EH = c\times c = c^2$
- L'aire de chacun des triangles rectangles égaux à AEH (moitié d'un rectangle) est $\frac{AE \times AH}{2} = \frac{a\times b}{2}$.
- Le total A_3 des 4 aires de des triangles rectangles est $4 \times \frac{a\times b}{2} = 2a\times b = 2ab$.

L'aire A_1 du grand carré es égale à celle A_2 du petit carré et de la somme A_3 des aires des quatre triangles rectangles, soit : $A_1 = A_2 + A_3$.

On remplace par les formules trouvées : $a^2 + \mathbf{2ab} + b^2 \mathbf{=} c^2 + \mathbf{2ab}$.

On déduit bien : $a^2 + b^2 = c^2$ ou $AE^2 + AH^2 = EH^2$.

On a bien montré que tout triangle rectangle vérifie : *La somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse*. (Chapeau, Mr Pythagore !).