Second Degré – Racines Evidentes

Somme et Produit des Racines :

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré ($a \neq 0$).

On supposera que l'équation admet des racines $\Leftrightarrow$ $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$.

Somme des Racines : $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$.

Produit des Racines : $P = x_1x_2 = \left(\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \dfrac{(b - \sqrt{\Delta})(b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \dfrac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \dfrac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

Les racines d'une équation du second degré, lorsqu'elles existent, ont pour *Somme* $S = -\dfrac{b}{a}$ et pour *Produit* $P = \dfrac{c}{a}$

Ainsi : $2x^2 - 9x + 10 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 80 = 1$ $\Rightarrow$ Deux racines distinctes $\begin{cases} \alpha = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9 + 1}{4} = \dfrac{5}{2} \\ \beta = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9 - 1}{4} = 2 \end{cases}$.

La somme des racines est $\alpha + \beta = \dfrac{5}{2} + 2 = \dfrac{9}{2} = -\dfrac{b}{a}$, et leur produit $\alpha\beta = \dfrac{5}{2} \times 2 = 5 = \dfrac{c}{a}$.

Inversement : **Résolution rapide d'une équation du second degré .**

En regardant les valeurs de a , b , c , si on trouve deux nombres α et β de somme $-\dfrac{b}{a}$ et de produit $\dfrac{c}{a}$,

il s'agit des deux racines de l'équation.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 + 5x - 14 = 0$.

$S = \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -5$ et $P = \dfrac{c}{a} = -14$ $\Rightarrow$ $\alpha = -7$ et $\beta = +2$ (ou inversement).

Lorsqu'on trouve les racines par cette méthode, ce sont les seules racines possibles, on peut être sûr du résultat..

Réciproquement :

Deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$.

$\left\{\begin{array}{l} S = x' + x'' \\ P = x'x'' \end{array}\right\} \Rightarrow x'$ et x'' racines de $X^2 - SX + P = 0$

Preuve : Soit $\alpha + \beta = S$ et $\alpha\beta = P$, S et P connus.

$\beta = S - \alpha \Rightarrow \alpha\beta = \alpha(S - \alpha)$, soit $\alpha^2 - S\alpha + P = 0$.

Les rôles de α et β étant symétriques, on aurait également obtenu $\beta^2 - S\beta + P = 0$.

Les nombres α et β sont les racines de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

Exemple : Déterminer a et b réels, sachant $\left\{\begin{array}{l} a + b = 3 \\ ab = -10 \end{array}\right.$.

$\left\{\begin{array}{l} S = a + b = 3 \\ P = ab = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow a , b$ racines de $X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X - 10 = 0$.

$$\Delta = 49 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 + 7}{2} = +5 \\ X_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 - 7}{2} = -2 \end{array}\right. .$$

a , b ayant des rôles symétriques, il existe deux couples solutions : $(a ; b) = (5 ; -2)$ et $(a ; b) = (-2 ; 5)$.

<u>Détection des racines évidentes +1 et -1 :</u>

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

+1 solution $\Leftrightarrow$ $a(+1)^2 + b(+1) + c = 0$ $\Leftrightarrow$ $a + b + c = 0$.

Dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, si $a + b + c = 0$, on peut affirmer que $x' = +1$ est *racine* de l'équation.

Comme le produit des racines est $x'x'' = \frac{c}{a}$, on déduit $(+1) \times x'' = \frac{c}{a}$, soit $x'' = \frac{c}{a}$.

Propriété 1 : (racine évidente +1)

Soit à résoudre $ax^2 + bx + c = 0$. $a + b + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{c}{a} \end{cases}$.

Ainsi : $3x^2 + 2x - 5 = 0$ vérifie $a + b + c = 3 + 2 + (-5) = 0$, d'où $\begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{c}{a} = -\frac{5}{3} \end{cases}$.

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

-1 solution $\Leftrightarrow$ $a(-1)^2 + b(-1) + c = 0$ $\Leftrightarrow$ $a - b + c = 0$.

Dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, si $a - b + c = 0$, on peut affirmer que $x' = -1$ est *racine* de l'équation.

Comme le produit des racines est $x'x'' = \frac{c}{a}$, on déduit $(-1) \times x'' = \frac{c}{a}$, soit $-x'' = \frac{c}{a}$ ou $x'' = -\frac{c}{a}$.

Propriété 2 : (racine évidente -1)

Soit à résoudre $ax^2 + bx + c = 0$. $a - b + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = -\frac{c}{a} \end{cases}$.

Ainsi : $3x^2 + 2x - 1 = 0$ vérifie $a - b + c = 3 - 2 + (-1) = 0$, d'où $\begin{cases} x' = -1 \\ x'' = \frac{c}{a} = +\frac{1}{3} \end{cases}$.