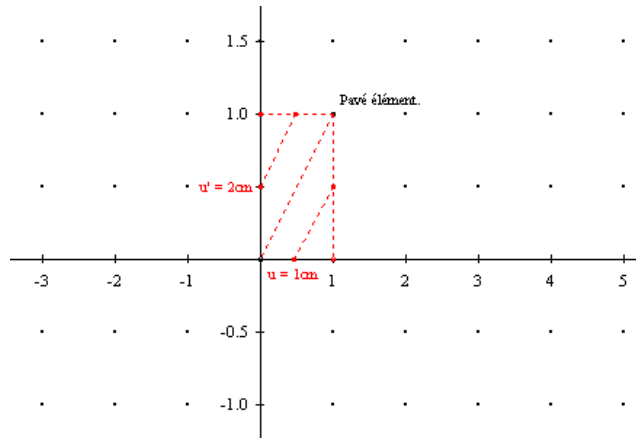


1/ Notion de Pavé Élémentaire :

Soit un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, le vecteur unitaire \vec{i} des abscisses, ayant une longueur u (exprimée dans une unité quelconque cm, mm, ...), et le vecteur unitaire \vec{j} des ordonnées, ayant une longueur u' .

On définit ainsi un *pavé élémentaire* dont l'aire est égale à uu' (Longueur par largeur).



Le pavé élémentaire précédent a pour Aire : $u \times u' = 2\text{cm}^2$.

Le calcul intégral permet de mesurer des surfaces et des aires entre deux courbes, par le calcul du nombre de pavés élémentaires entre ces courbes.

2/ Calcul approché d'une Surface :

- Une *surface* est une notion *algébrique*, donc de signe positif comme négatif.
- Une *aire* est une notion *arithmétique*, donc toujours de signe positif.

Le calcul intégral ne mesure que des surfaces, donc fournit des résultats algébriques. Ses résultats doivent ensuite être adaptés pour mesurer des aires arithmétiques.

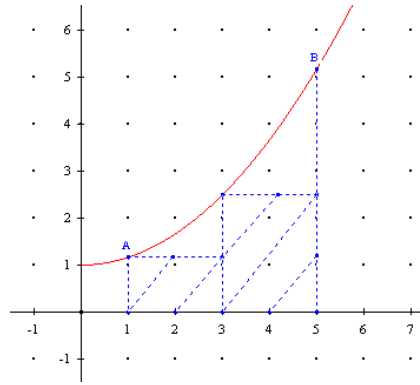
$\int_a^b f(x) dx$ mesure la *surface* (nombre algébrique de pavés élémentaires) entre la courbe représentative de f et l'axe $x'x$, en tenant compte du sens dans lequel se fait le parcours $a \leq x \leq b$, et la valeur, donc le signe de l'ordonnée $f(x)$ selon la position de x , qui varie de a vers b .

$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$ mesure la *surface* entre la courbe représentative de f et celle de g , en tenant compte du sens dans lequel se fait le parcours $a \leq x \leq b$, et la valeur, donc le signe de la différence d'ordonnées $g(x) - f(x)$, selon la position de x , qui varie de a vers b .

Comme l'axe $x'x$ des abscisses a pour équation $h(x) = 0$, on doit voir que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (f(x) - h(x)) dx$.

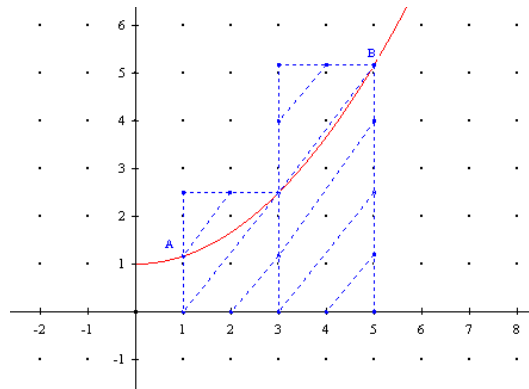
Dans la notation $\int_a^b f(x) dx$, qui pourrait être notée $\sum_a^b f(x) dx$, on fait la *somme* de rectangles de *hauteur algébrique* $f(x)$, de *largeur algébrique* dx , donc de *surfaces* (algébriques) $f(x) \times dx$, après un découpage de l'intervalle $[a; b]$ en largeurs dx

rendues de plus en plus petites, afin que cette somme de rectangles se confonde au mieux avec la surface entre la courbe représentative de f et l'axe x des abscisses.



$\int_1^5 f(x) dx$ est grossièrement *minorée* par la somme des *surfaces* sous les 2 rectangles hachurés :

$$\int_1^5 f(x) dx \geq f(1) \times 2 + f(3) \times 2 = 7,33 \text{ pavés avec } dx = h = 2 .$$

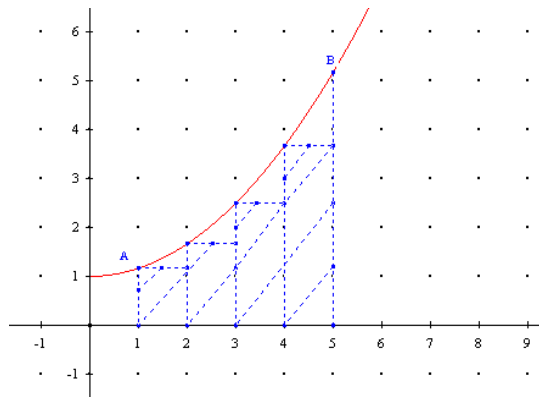


$\int_1^5 f(x) dx$ est grossièrement *majorée* par la somme des *surfaces* sous les 2 rectangles hachurés :

$$\int_1^5 f(x) dx \leq f(3) \times 2 + f(5) \times 2 = 30,67 \text{ pavés avec } dx = h = 2 .$$

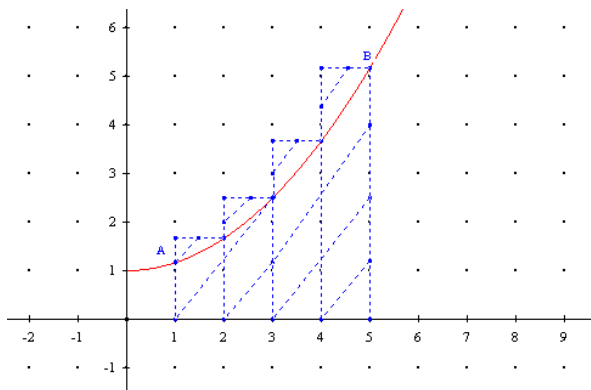
$$\text{D'où : } 7,33 \leq \int_1^5 f(x) dx \leq 30,67 \text{ pavés (approximation très grossière).}$$

On réduit ensuite la largeur commune à chaque rectangle, par exemple en doublant successivement le nombre de ces derniers, jusqu'à encadrer de mieux en mieux la *surface* à calculer.



$\int_1^5 f(x) dx$ est plus finement *minorée* par la somme des *surfaces* sous les 4 rectangles hachurés :

$$\int_1^5 f(x) dx \leq f(1) \times 1 + f(2) \times 1 + f(3) \times 1 + f(4) \times 1 = 9 \text{ pavés avec } dx = h = 1 .$$



$\int_1^5 f(x) dx$ est plus finement *majorée* par la somme des *surfaces* sous les 4 rectangles hachurés :

$$\int_1^5 f(x) dx \leq f(2) \times 1 + f(3) \times 1 + f(4) \times 1 + f(5) \times 1 = 13 \text{ pavés avec } dx = h = 1 .$$

D'où : $9 \leq \int_1^5 f(x) dx \leq 13$ pavés (approximation meilleure).

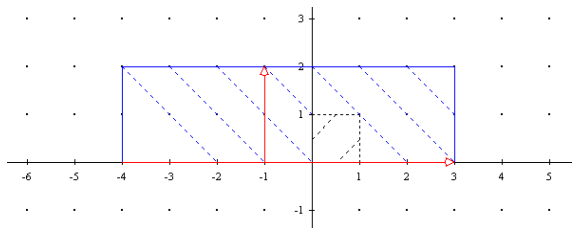
.....

De proche en proche, on atteint ainsi une approximation très fine de $\int_1^5 f(x) dx$.

On pourrait dire : $\int_1^5 f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n f(a + kh) \times h \right)$, où n mesure le nombre de rectangles contigus, de largeur h que l'on trouve entre a et b .

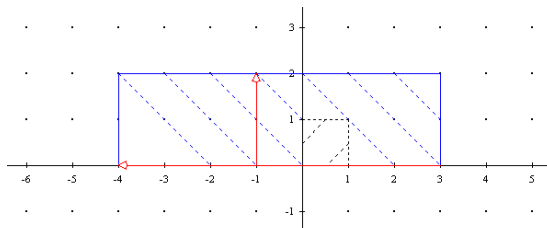
Dans cette dernière notation, on retrouve la notion de *surface des rectangles* d'approximation $f(a + kh) \times h$ que l'on rapproche de l'écriture théorique $f(x) dx$.

3/ Exemples de Surfaces et d'Aires basiques :



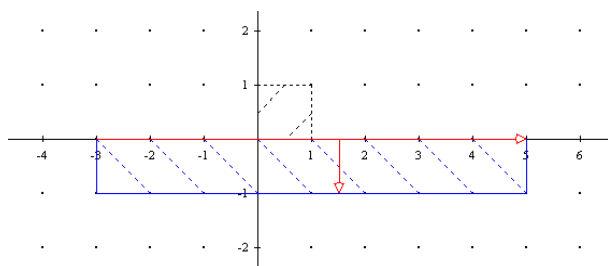
$$\int_{-4}^{+3} f(x) dx = (+7) \times (+2) = +14 \text{ pavés}$$

$$S_{-4}^{+3} = +14 \text{ et } A_{-4}^{+3} = |S_{-4}^{+3}| = +14$$



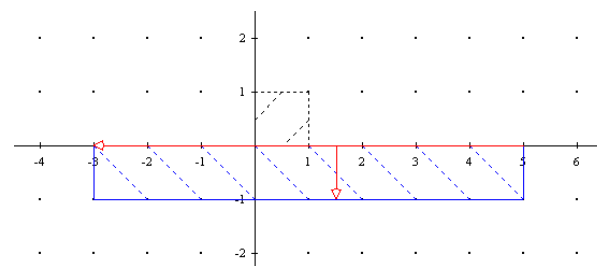
$$\int_{+3}^{-4} f(x) dx = (-7) \times (+2) = -14 \text{ pavés}$$

$$S_{+3}^{-4} = -14 \text{ et } A_{+3}^{-4} = |S_{+3}^{-4}| = +14$$



$$\int_{-3}^{+5} f(x) dx = (+8) \times (-1) = -8 \text{ pavés}$$

$$S_{-3}^{+5} = -8 \text{ et } A_{-3}^{+5} = |S_{-3}^{+5}| = +8$$

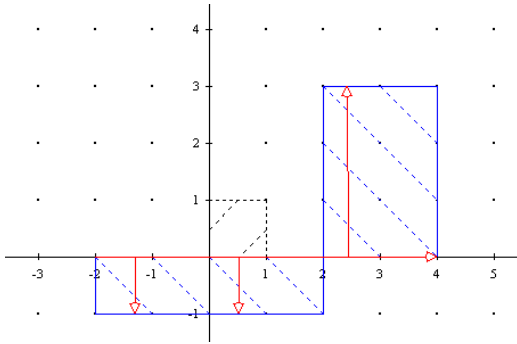


$$\int_{+5}^{-3} f(x) dx = (-8) \times (-1) = +8 \text{ pavés}$$

$$S_{+5}^{-3} = +8 \text{ et } A_{+5}^{-3} = |S_{+5}^{-3}| = +8$$

Remarques : $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ $\int_a^a f(x) dx = 0$ (largeur d'intégration nulle).

$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$ (relation de Chasles).

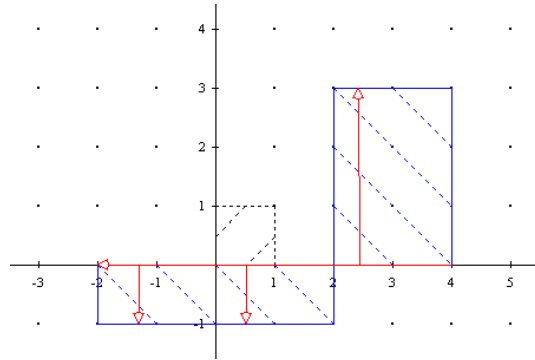


$$S_{-2}^{+4} = \int_{-2}^{+4} f(x) dx = (+4) \times (-1) + (+2) \times (+3) = +2 \text{ pavés}$$

$$A_{-2}^{+4} = A_{-2}^{+2} + A_{+2}^{+4} = |S_{-2}^{+2}| + S_{+2}^{+4}$$

$$A_{-2}^{+4} = -\left(\int_{-2}^{+2} f(x) dx\right) + \int_{+2}^{+4} f(x) dx$$

$$A_{-2}^{+4} = A_{+4}^{-2} = (+4) \times (+1) + (+2) \times (+3) = 10 \text{ pavés}$$

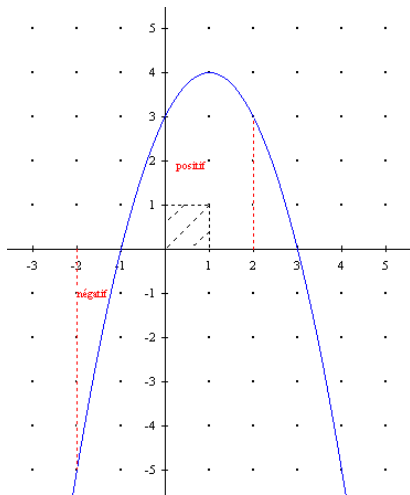


$$S_{+4}^{-2} = \int_{+4}^{-2} f(x) dx = (-2) \times (+3) + (-4) \times (-1) = -2 \text{ pavés}$$

$$A_{+4}^{-2} = A_{+4}^{+2} + A_{+2}^{-2} = |S_{+4}^{+2}| + S_{+2}^{-2}$$

$$A_{+4}^{-2} = -\int_{+4}^{+2} f(x) dx + \int_{+2}^{-2} f(x) dx$$

$$A_{+4}^{-2} = A_{-2}^{+4} = (+2) \times (+3) + (+4) \times (+3) = 10 \text{ pavés}$$



Surface entre $f(x)$ et l'axe $x'x$

$$S_{-2}^{+2} = \int_{-2}^{+2} f(x) dx = +6,67 \text{ pavés}$$

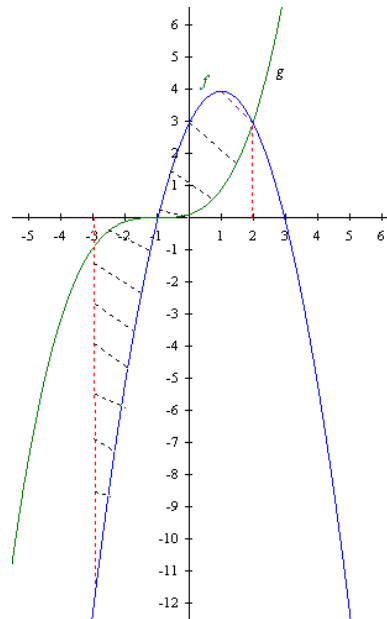
On a fait le bilan (positif/négatif) entre $y=f(x)$ et l'axe $x'x$: $y=0$

Aire entre $f(x)$ et l'axe $x'x$

$$A_{-2}^{+2} = -\left(\int_{-2}^{-1} f(x) dx\right) + \int_{-1}^{+2} f(x) dx$$

$$A_{-2}^{+2} = A_{+2}^{-2} = -(-2,33) + (+9) = 11,33 \text{ pavés}$$

Tout est compté en *positif*.



Surface entre $f(x)$ et $g(x)$

$$S_{-3}^{+2} = \int_{-3}^{+2} (f(x) - g(x)) dx = -3,47 \text{ pavés}$$

On a fait le bilan (positif/négatif) entre $y=f(x)$ et $y=g(x)$ par la différence $f(x) - g(x)$, négative sur $[-3 ; -1]$ et positive sur $[-1 ; +2]$.

Aire entre $f(x)$ et $g(x)$

$$A_{-3}^{+2} = -\left(\int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)) dx\right) + \int_{-1}^{+2} (f(x) - g(x)) dx$$

$$A_{-3}^{+2} = A_{+2}^{-3} = 10,22 + 6,75 = 16,97 \text{ pavés}$$

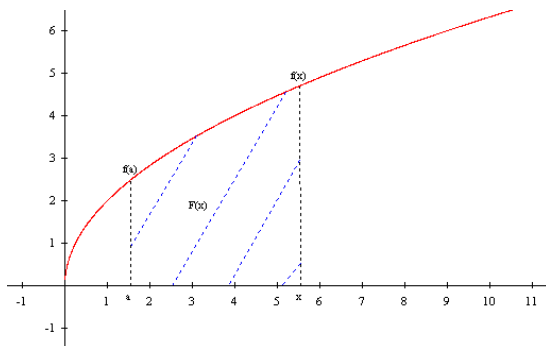
Tout est compté en *positif*.

4/ Relation entre *Primitive* d'une fonction continue et *Surface* :

Soit $F(x)$ la fonction qui mesure en pavés élémentaires la *surface* entre $y = f(x)$ et l'axe $x'x$, de l'abscisse a jusqu'à x :

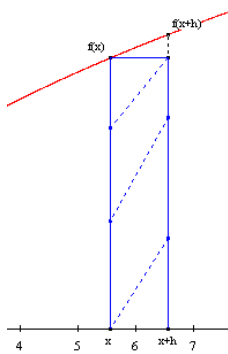
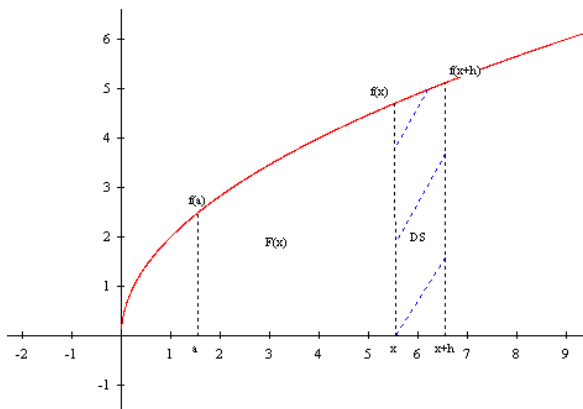
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt .$$

(On a remplacé x par t comme variable d'intégration, car x ne peut pas être simultanément une borne d'intégration et la variable entre a et cette borne).

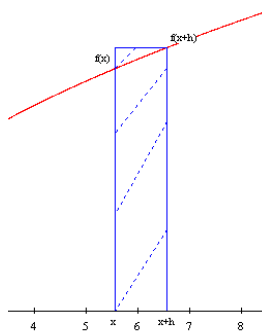


En rapprochant ou éloignant x de l'abscisse a , on modifie la *surface* $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, ce qui justifie sa notation sous forme de fonction de la variable x .

La surface suivante est : $\Delta S = F(x+h) - F(x)$ que l'on encadre entre un rectangle minorant et un rectangle majorant :



Minorant : $f(x) \times h$



Majorant : $f(x+h) \times h$

D'où : $f(x) \times h \leq \Delta S \leq f(x+h) \times h \Rightarrow f(x) \leq \frac{\Delta S}{h} \leq f(x+h)$ puisque $h > 0$, soit : $f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

La fonction f étant supposée *continue* sur son domaine, on sait que $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$.

En conséquence : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$, soit $F'(x) = f(x)$.

La fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ qui mesure en pavés élémentaires la *surface algébrique* entre la courbe $f(x)$ et l'axe $x'x$ est la *primitive* de f , nulle en $x = a$, puisque $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$.

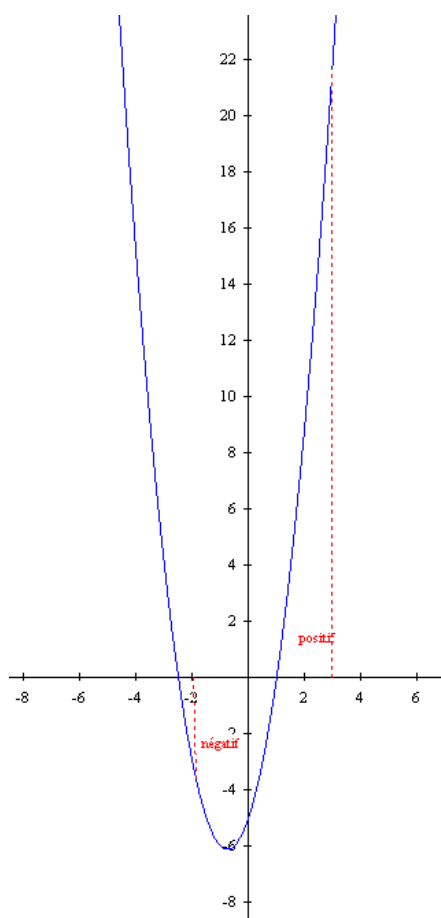
Remarque : Dans la pratique, on choisit la primitive $F(x)$ de f sans constante k , car si la bonne primitive est $G(x) = F(x) + k$: $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$ et $\int_a^a f(t) dt = G(a) - G(a) = 0 = F(a) + k - (F(a) + k) = 0$, d'où $k = -F(a)$.

On déduit : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ noté $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ donc prendre F sans constante.

Exemple 1 : Calcul de $\int_{-2}^3 (2x^2 + 3x - 5) dx$.

$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ admet $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x$ pour primitive :

$$S_{-2}^3 = \int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^3 (2x^2 + 3x - 5) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x \right]_{-2}^3 = [F(x)]_{-2}^3 = F(3) - F(-2) = \frac{35}{6} \text{ pavés} = 5,83 \text{ uu}'.$$



Pour calculer A_{-2}^3 : On cherche les intersections de f avec l'axe $x'x$, soit $\alpha = -\frac{5}{2}$ et $\beta = +1$.

$$A_{-2}^3 = A_{-2}^1 + A_1^3 = -(S_{-2}^1) + S_1^3 = -(\int_{-2}^1 f(x) dx) + \int_1^3 f(x) dx = -(F(1) - F(-2)) + (F(3) - F(1)) = F(-2) + F(3) - 2F(1)$$

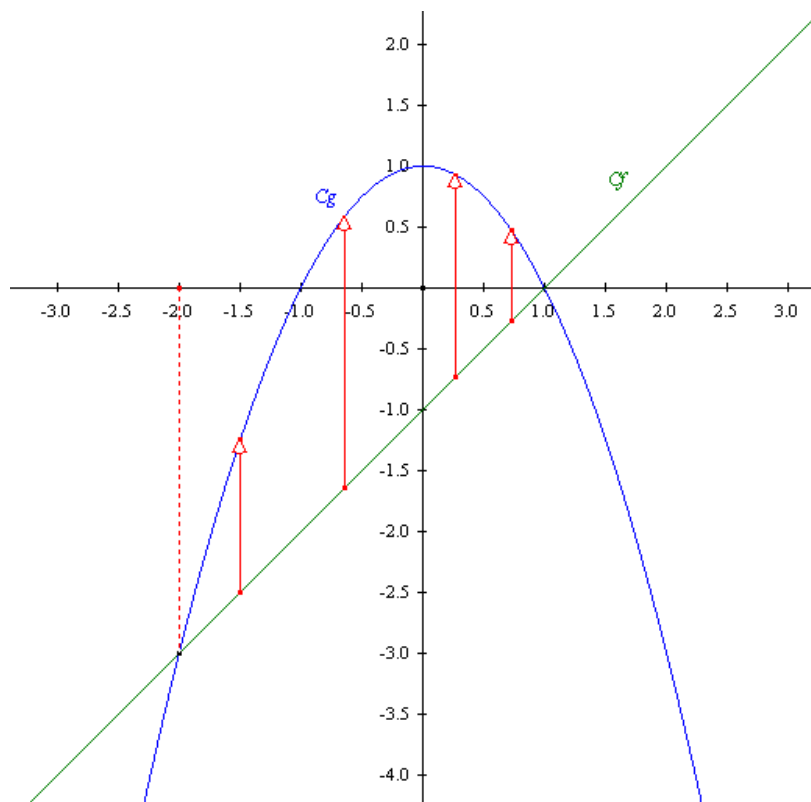
$$A_{-2}^3 = \frac{196}{6} \text{ pavés} = 32,83 \text{ uu}'.$$

Exemple 2 : Calcul d'une Aire entre deux graphes.

Il faut tout d'abord tracer les deux courbes représentatives concernées ($u = 2 \text{ cm}$, $u' = 1 \text{ cm}$).

Soit $f(x) = x - 1$ et $g(x) = -x^2 + 1$.

Après étude, les graphes sont les suivants, et les courbes se coupent en $x = -2$ ($y = -3$) et $x = 1$ ($y = 0$).



On constate que sur l'intervalle $[-2 ; +1]$ la courbe représentative de g est toujours au dessus de celle de f .

L'aire est donc égale à la surface $S = \int_{-2}^1 (g(x) - f(x)) dx$ (en nombre de pavés).

Pour calculer l'aire entre deux courbes, on fait toujours :

Intégrale de "Fonction du dessus moins Fonction du dessous".

$$S = \int_{-2}^1 [(-x^2 + 1) - (x - 1)] dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = [F(x)]_{-2}^1 = F(1) - F(-2) \text{ pavés.}$$

$$S = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = +\frac{9}{2} \text{ pavés} = +\frac{9}{2} uu' = +\frac{9}{2} \times 2 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2.$$