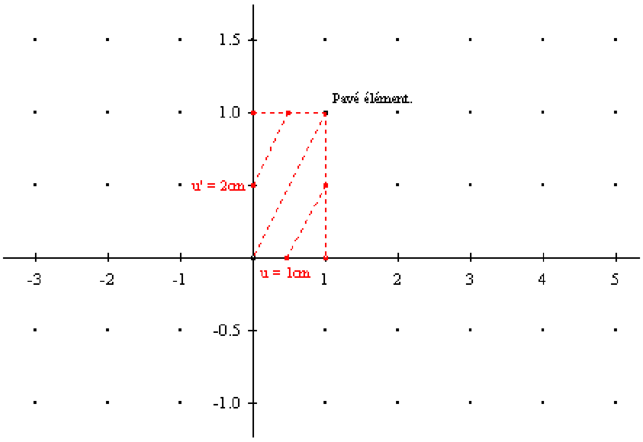
1/ Notion de Pavé Elémentaire :

Soit un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, le vecteur unitaire $\vec{i}$ des abscisses, ayant une longueur u (exprimée dans une unité quelconque cm , mm , ...) , et le vecteur unitaire $\vec{j}$ des ordonnées, ayant une longueur u' .

On définit ainsi un *pavé élémentaire* dont l'aire est égale à uu' (Longueur par largeur).



Le pavé élémentaire précédent a pour *Aire* : $u \times u' = 2\text{cm}^2$.

Le calcul intégral permet de mesurer des *surfaces* et des *aires* entre deux courbes, par le calcul du nombre de pavés élémentaires entre ces courbes.

2/ Calcul approché d'une Surface :

- Une *surface* est une notion *algébrique* , donc de signe positif comme négatif.
- Une *aire* est une notion *arithmétique* , donc toujours de signe positif.

Le calcul intégral ne mesure que des *surfaces* , donc fournit des résultats *algébriques* . Ses résultats doivent *ensuite* être adaptés pour mesurer des *aires* arithmétiques.

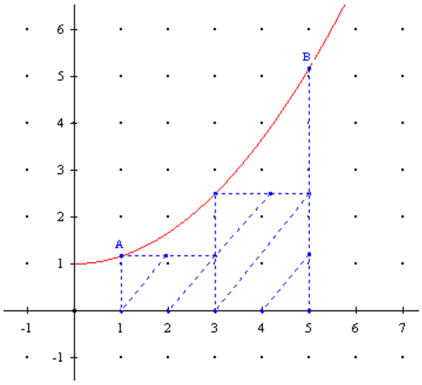
$\int_a^b f(x)\,dx$ mesure la *surface* (nombre algébrique de pavés élémentaires) entre la courbe représentative de f et l'axe $x'x$, en tenant compte du sens dans lequel se fait le parcours $a \le x \le b$, et la valeur, donc le signe de l'ordonnée $f(x)$ selon la position de x , qui varie de a vers b.

$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$ mesure la *surface* entre la courbe représentative de f et celle de g , en tenant compte du sens dans lequel se fait le parcours $a \le x \le b$, et la valeur, donc le signe de la différence d'ordonnées $g(x) - f(x)$, selon la position de x , qui varie de a vers b.

Comme l'axe $x'x$ des abscisses a pour équation $h(x) = 0$, on doit voir que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - h(x))\,dx$.

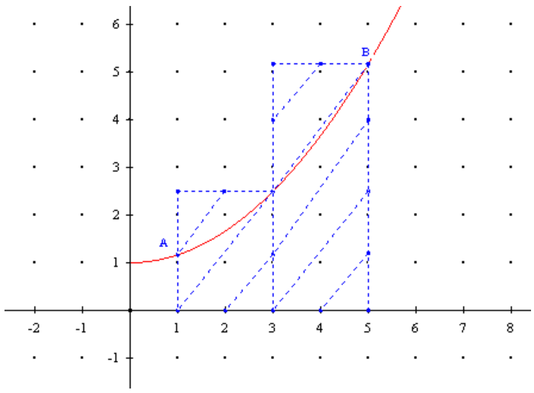
Dans la notation $\int_a^b f(x)\,dx$, qui pourrait être notée $\sum_a^b f(x)\,dx$, on fait la *somme* de rectangles de *hauteur algébrique* $f(x)$, de *largeur algébrique* dx , donc de *surfaces* (algébriques) $f(x) \times dx$, après un découpage de l'intervalle $[a ; b]$ en largeurs dx

rendues de plus en plus petites, afin que cette somme de rectangles se confonde au mieux avec la surface entre la courbe représentative de f et l'axe $x'x$ des abscisses.



$\int_1^5 f(x)\,dx$ est grossièrement *minorée* par la somme des *surfaces* sous les 2 rectangles hachurés :

$$\int_1^5 f(x)\,dx \geq f(1) \times 2 + f(3) \times 2 = 7{,}33 \text{ pavés} \quad \text{avec } dx = h = 2 .$$

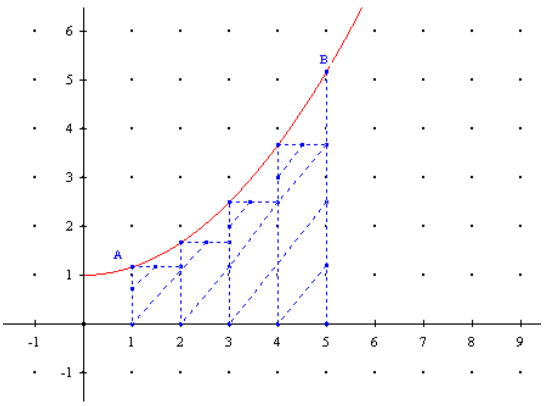


$\int_1^5 f(x)\,dx$ est grossièrement *majorée* par la somme des *surfaces* sous les 2 rectangles hachurés :

$$\int_1^5 f(x)\,dx \leq f(3) \times 2 + f(5) \times 2 = 30{,}67 \text{ pavés} \quad \text{avec } dx = h = 2 .$$

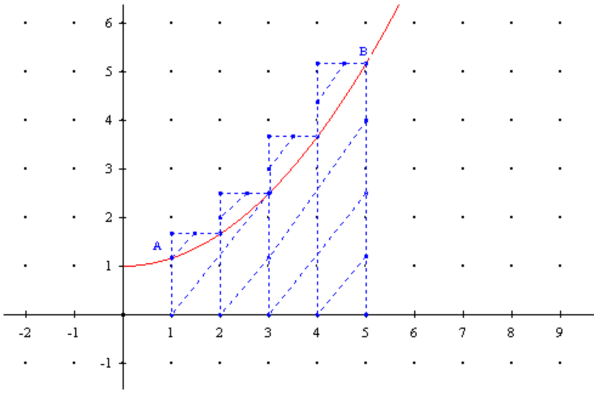
D'où : $7{,}33 \leq \int_1^5 f(x)\,dx \leq 30{,}67$ pavés (approximation très grossière).

On réduit ensuite la largeur commune à chaque rectangle, par exemple en doublant successivement le nombre de ces derniers, jusqu'à encadrer de mieux en mieux la *surface* à calculer.



$\int_1^5 f(x)\,dx$ est plus finement *minorée* par la somme des *surfaces* sous les 4 rectangles hachurés :

$$\int_1^5 f(x)\,dx \leq f(1) \times 1 + f(2) \times 1 + f(3) \times 1 + f(4) \times 1 = 9 \text{ pavés} \quad \text{avec } dx = h = 1 .$$



$\int_1^5 f(x)\,dx$ est plus finement *majorée* par la somme des *surfaces* sous les 4 rectangles hachurés :

$$\int_1^5 f(x)\,dx \leq f(2) \times 1 + f(3) \times 1 + f(4) \times 1 + f(5) \times 1 = 13 \text{ pavés} \quad \text{avec } dx = h = 1 .$$

D'où : $9 \leq \int_1^5 f(x)\,dx \leq 13$ pavés (approximation meilleure).

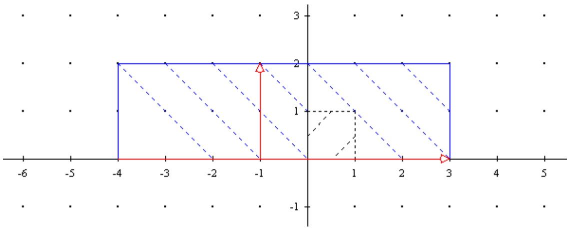
.....

De proche en proche, on atteint ainsi une approximation très fine de $\int_1^5 f(x)\,dx$.

On pourrait dire : $\int_1^5 f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} f(a + kh) \times h \right)$, où n mesure le nombre de rectangles contigus, de largeur h que l'on trouve entre a et b .

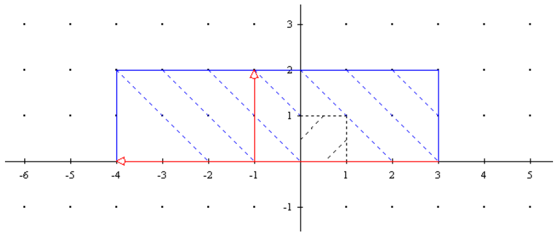
Dans cette dernière notation, on retrouve la notion de *surface des rectangles* d'approximation $f(a + kh) \times h$ que l'on rapproche de l'écriture théorique $f(x)\,dx$.

3/ Exemples de Surfaces et d'Aires basiques :



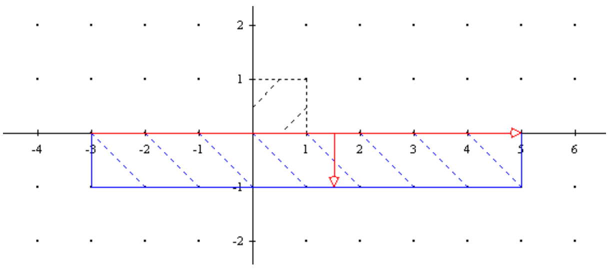
$\int_{-4}^{+3} f(x)\,dx = (+7)\times(+2) = +14$ pavés

$S_{-4}^{+3} = +14$ et $A_{-4}^{+3} = |S_{-4}^{+3}| = +14$



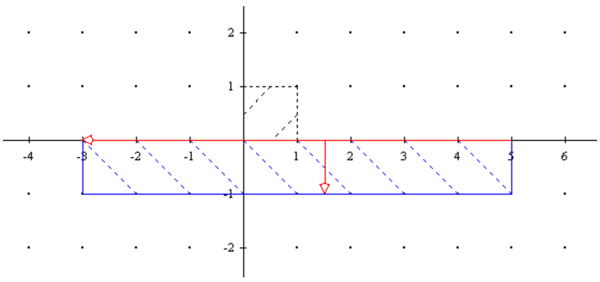
$\int_{+3}^{-4} f(x)\,dx = (-7)\times(+2) = -14$ pavés

$S_{+3}^{-4} = -14$ et $A_{+3}^{-4} = |S_{+3}^{-4}| = +14$



$\int_{-3}^{+5} f(x)\,dx = (+8)\times(-1) = -8$ pavés

$S_{-3}^{+5} = -8$ et $A_{-3}^{+5} = |S_{-3}^{+5}| = +8$

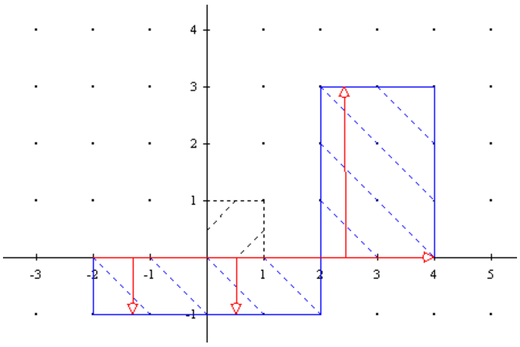


$\int_{+5}^{-3} f(x)\,dx = (-8)\times(-1) = +8$ pavés

$S_{+5}^{-3} = -8$ et $A_{+5}^{-3} = |S_{+5}^{-3}| = +8$

Remarques : $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ $\quad\quad$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (largeur d'intégration nulle).

$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ (relation de Chasles).

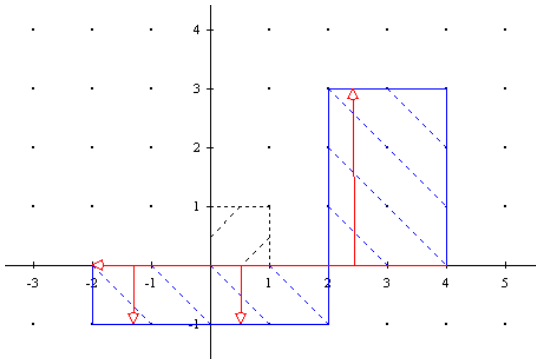


$S^{+4}_{-2} = \int_{-2}^{+4} f(x)\,dx = (+4)\times(-1) + (+2)\times(+3) = +2$ pavés

$A^{+4}_{-2} = A^{+2}_{-2} + A^{+4}_{+2} = |S^{+2}_{-2}| + S^{+4}_{+2}$

$A^{+4}_{-2} = -\left(\int_{-2}^{+2} f(x)\,dx\right) + \int_{+2}^{+4} f(x)\,dx$

$A^{+4}_{-2} = A^{-2}_{+4} = (+4)\times(+1) + (+2)\times(+3) = 10$ pavés

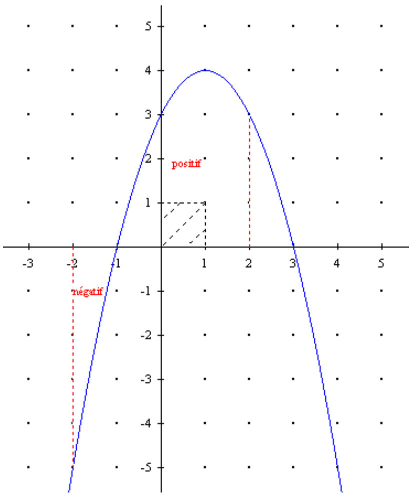


$S^{-2}_{+4} = \int_{+4}^{-2} f(x)\,dx = (-2)\times(+3) + (-4)\times(-1) = -2$ pavés

$A^{-2}_{+4} = A^{-2}_{+4} + A^{-2}_{+4} = |S^{-2}_{+4}| + S^{-2}_{+4}$

$A^{-2}_{+4} = \int_{-2}^{+2} f(x)\,dx + -\left(\int_{+2}^{+4} f(x)\,dx\right)$

$A^{-2}_{+4} = A^{+4}_{-2} = (+2)\times(+3) + (+4)\times(+3) = 10$ pavés



Surface entre $f(x)$ et l'axe $x'x$

$S^{+2}_{-2} = \int_{-2}^{+2} f(x)\,dx = +6{,}67$ pavés

On a fait le bilan (positif/négatif)

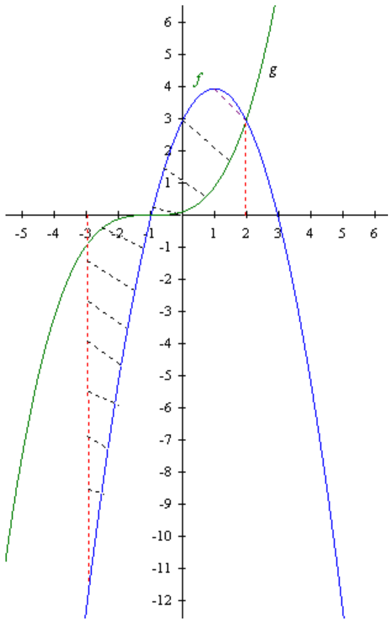
entre $y = f(x)$ et l'axe $x'x$: $y = 0$

Aire entre $f(x)$ et l'axe $x'x$

$A^{+2}_{-2} = -\left(\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx\right) + \int_{-1}^{+2} f(x)\,dx$

$A^{+2}_{-2} = A^{-2}_{+2} = -(-2{,}33) + (+9) = 11{,}33$ pavés

Tout est compté en *positif*.



Surface entre $f(x)$ et $g(x)$

$S^{+2}_{-3} = \int_{-3}^{+2} (f(x) - g(x))\,dx = -3{,}47$ pavés

On a fait le bilan (positif/négatif)

entre $y = f(x)$ et $y = g(x)$ par la différence $f(x) - g(x)$,

négative sur $[-3 ; -1]$ et positive sur $[-1 ; +2]$.

Aire entre $f(x)$ et $g(x)$

$A^{+2}_{-3} = -\left(\int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x))\,dx\right) + \int_{-1}^{+2} (f(x) - g(x))\,dx$

$A^{+2}_{-3} = A^{-3}_{+2} = 10{,}22 + 6{,}75 = 16{,}97$ pavés

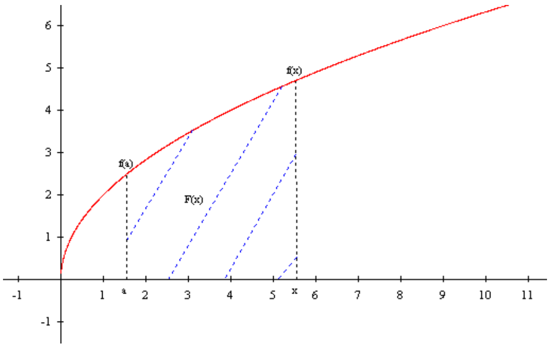
Tout est compté en *positif*.

4/ <u>Relation entre *Primitive* d'une fonction continue et *Surface* :</u>

Soit $F(x)$ la fonction qui mesure en pavés élémentaires la *surface* entre $y = f(x)$ et l'axe $x'x$, de l'abscisse a jusqu'à x :

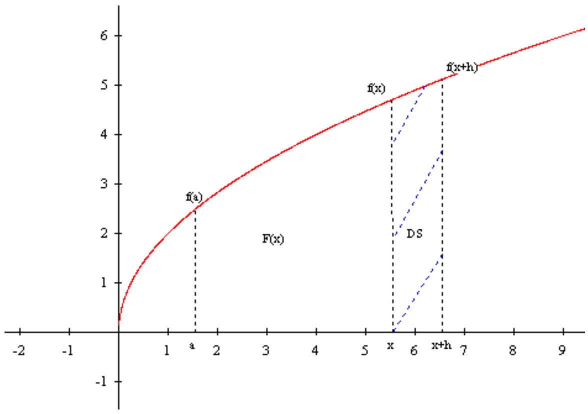
$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

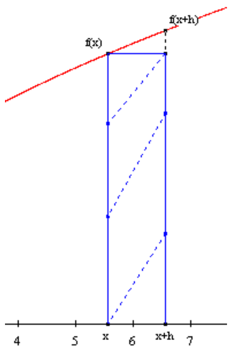
(On a remplacé x par t comme variable d'intégration, car x ne peut pas être simultanément une borne d'intégration et la variable entre a et cette borne).

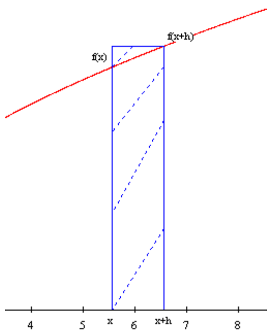


En rapprochant ou éloignant x de l'abscisse a , on modifie la *surface* $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, ce qui justifie sa notation sous forme de fonction de la variable x .

La surface suivante est : $\Delta S = F(x + h) - F(x)$ que l'on encadre entre un rectangle minorant et un rectangle majorant :







Minorant : $f(x) \times h$ Majorant : $f(x + h) \times h$

D'où : $f(x) \times h \le \Delta S \le f(x + h) \times h \;\Rightarrow\; f(x) \le \dfrac{\Delta S}{h} \le f(x + h)$ puisque $h > 0$, soit : $f(x) \le \dfrac{F(x + h) - F(x)}{h} \le f(x + h)$.

La fonction f étant supposée *continue* sur son domaine, on sait que $\lim\limits_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$.

En conséquence : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x)$, soit $F'(x) = f(x)$.

La fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ qui mesure en pavés élémentaires la *surface algébrique* entre la courbe $f(x)$ et l'axe $x'x$ est la *primitive* de f, nulle en $x = a$, puisque $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Remarque : Dans la pratique, on choisit <u>la</u> primitive $F(x)$ de f sans constante k, car si la <u>bonne</u> primitive est $G(x) = F(x) + k$:

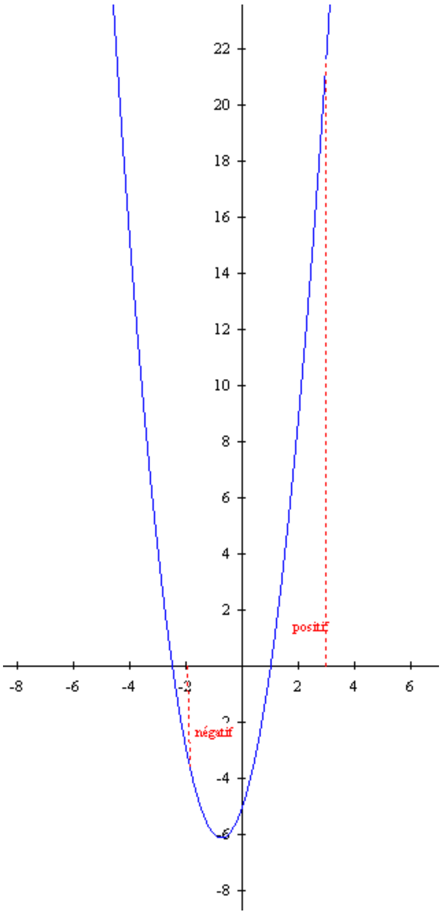
$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) = F(b) + k$ et $\int_a^a f(t)\,dt = G(a) = 0 = F(a) + k$, d'où $k = -F(a)$.

On déduit : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ noté $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ .... donc prendre F sans constante.

***Exemple* 1 : Calcul de $\int_{-2}^{3} (2x^2 + 3x - 5)\,dx$.**

$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ admet $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x$ pour primitive :

$S_{-2}^{3} = \int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3} (2x^2 + 3x - 5)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x\right]_{-2}^{3} = [F(x)]_{-2}^{3} = F(3) - F(-2) = \frac{35}{6}$ pavés $= 5{,}83\ uu'$.



Pour calculer A_{-2}^{3} : On cherche les intersections de f avec l'axe $x'x$, soit $\alpha = -\frac{5}{2}$ et $\beta = +1$.

$A_{-2}^{3} = A_{-2}^{1} + A_{1}^{3} = -(S_{-2}^{1}) + S_{1}^{3} = -(\int_{-2}^{1} f(x)\,dx) + \int_{1}^{3} f(x)\,dx = -(F(1) - F(-2)) + (F(3) - F(1) = F(-2) + F(3) - 2F(1)$

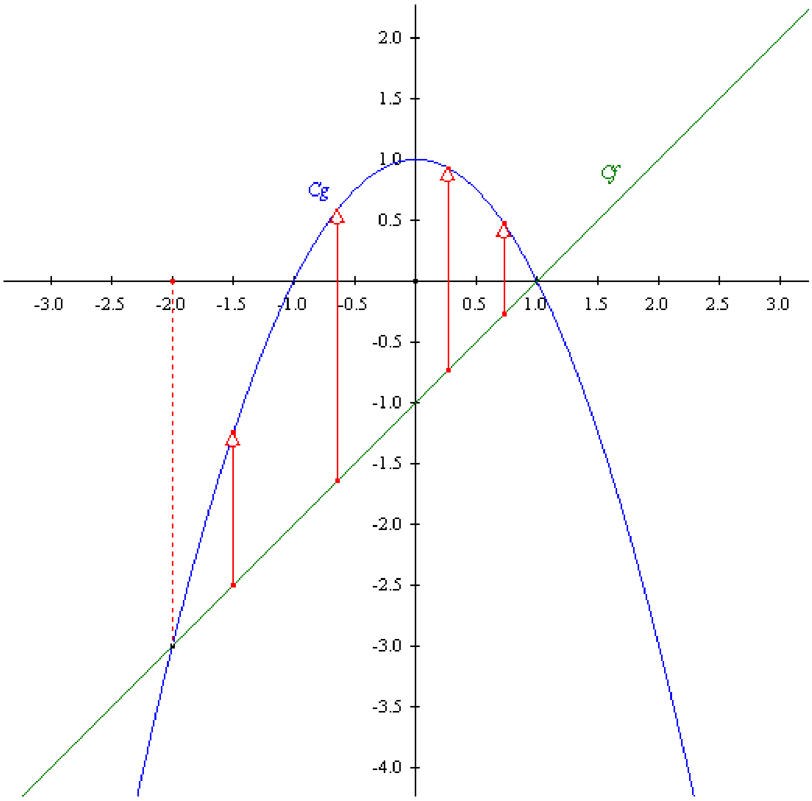
$A_{-2}^{3} = \frac{196}{6}$ pavés $= 32{,}83\ uu'$.

***Exemple* 2 :   Calcul d'une *Aire* entre deux graphes.**

Il faut tout d'abord tracer les deux courbes représentatives concernées (u = 2 cm , u' = 1 cm).

Soit $f(x) = x - 1$ et $g(x) = -x^2 + 1$.

Après étude, les graphes sont les suivants, et les courbes se coupent en $x = -2$ ($y = -3$) et $x = 1$ ($y = 0$) .



On constate que sur l'intervalle [-2 ; +1] la courbe représentative de g est toujours au dessus de celle de f .

L'*aire* est donc égale à la *surface* $S = \int_{-2}^{1} (g(x) - f(x))\, dx$ (en nombre de pavés).

Pour calculer l'*aire* entre deux courbe, on fait toujours :

Intégrale de "Fonction du dessus <u>moins</u> Fonction du dessous" .

$$S = \int_{-2}^{1} [(-x^2 + 1) - (x - 1)]\, dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} = [F(x)]_{-2}^{1} = F(1) - F(-2) \text{ pavés.}$$

$$S = (-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2) - (\frac{8}{3} - 2 - 4) = +\frac{9}{2} \text{ pavés} = +\frac{9}{2}\, uu' = +\frac{9}{2} \times 2 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2 .$$