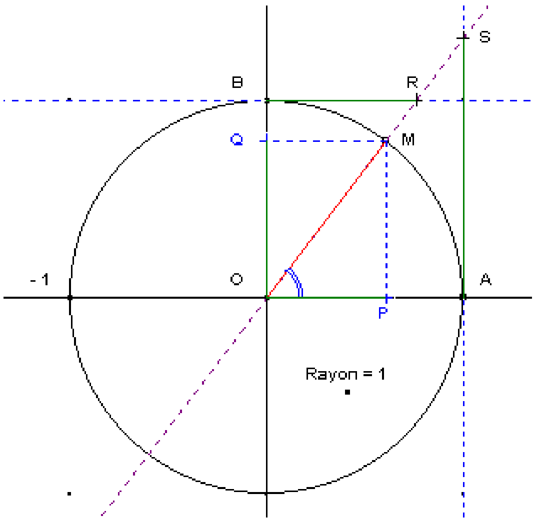
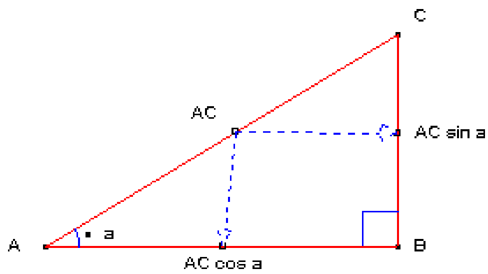
On appelle *cercle Trigonométrique* , un cercle de rayon $R = 1$, orienté positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Lignes trigonométriques d'un angle :

$\cos \alpha = \overline{OP}$; $\sin \alpha = \overline{OQ}$; $\tan \alpha = \overline{AS}$; $\text{cotan}\ \alpha = \overline{BR}$



Lignes trigonométriques dans un triangle rectangle quelconque :



$\cos \alpha = \dfrac{AB}{AC}$; $\sin \alpha = \dfrac{BC}{AC}$; $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{BC}{AB}$; $\text{cotan}\ \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha}$

Projection sur l'horizontale	:	$AB = AC \cdot \cos \alpha$	On multiplie par le *cosinus*
Projection sur la verticale	:	$BC = AC \cdot \sin \alpha$	On multiplie par le *sinus*
Relèvement - horizontale sur verticale :		$BC = AB \cdot \tan \alpha$	

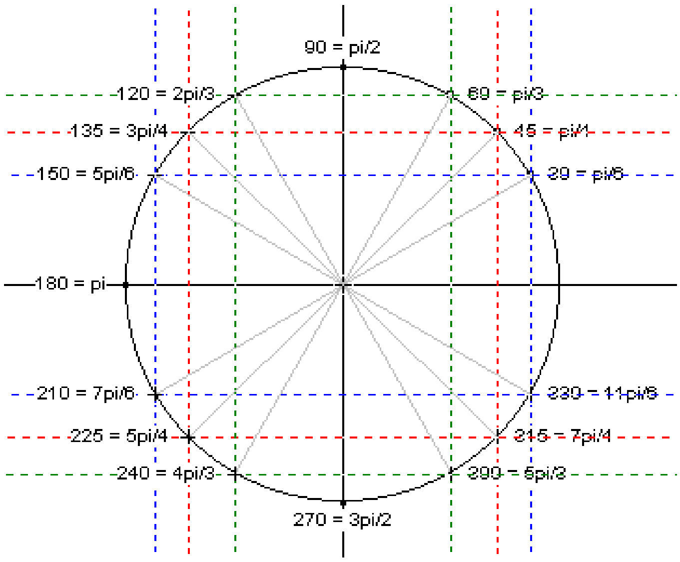
Relations fondamentales :

$-1 \leq \cos \alpha \leq +1$ et $-1 \leq \sin \alpha \leq +1$ $\qquad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ pour tout α réel

Lignes trigonométriques des angles usuels :

x^{deg}	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °	180 °
x^{rad}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	$+1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+1$	0

Angles remarquables :



Equations trigonométriques :

Deux angles ont même *cosinus* si et seulement si ils sont égaux ou opposés, au nombre de tours près.

$$\cos X = \cos A \iff \begin{cases} X \equiv +A\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ X \equiv -A\ [2\pi] \end{cases}$$

La notation $X \equiv A\ [2\pi]$ se lit X congru à A modulo 2π.

On dit aussi : $X = A + 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, où $2k\pi = k\,(2\pi) = k$ tours entiers.

Deux angles ont même *sinus* ssi ils sont égaux ou supplémentaires (somme π) , au nombre de tours près.

$$\sin X = \sin A \iff \begin{cases} X \equiv +A\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ X \equiv \pi - A\ [2\pi] \end{cases}$$

Deux angles ont même *tangente* si et seulement si ils sont égaux, au nombre de *<u>demi-tours</u>* près.

$$\tan X = \tan A \iff X \equiv A\ [\pi]$$

Angles associés :

Angles opposés	$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
Angles supplémentaires (somme = 180 °)	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
Angles différant de π (différence = 180 °)	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
Angles complémentaires (somme 90 °)	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Exemple : Résoudre $\sin 3x = \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi[$

On sait $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. L'équation devient $\sin 3x = \sin\frac{\pi}{6}$, d'où $\begin{cases} 3x \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \\ 3x \equiv \pi - \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases}$.

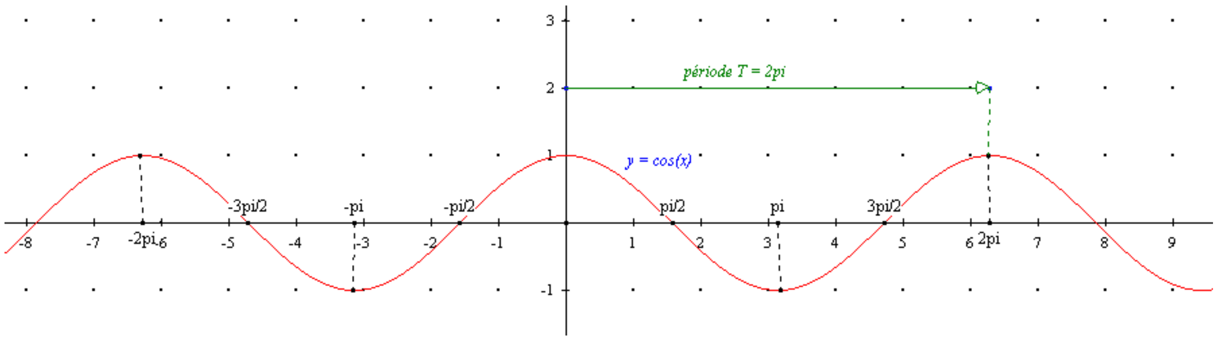
L'expression $[2\pi]$ signifie que les angles $3x$ solutions diffèrent entre eux de tours entiers, les solutions x , qui en sont les tiers, diffèrent de *tiers de tours* , donc de $\frac{2\pi}{3}$.

$\begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{18}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \\ x \equiv \frac{5\pi}{18}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$. Il faut ensuite sélectionner les angles x , calculés à partir de $\frac{\pi}{18}$ et $\frac{5\pi}{18}$, par sauts de $\pm\frac{2\pi}{3}$.

… $-\frac{23\pi}{18}$, $-\frac{11\pi}{18}$, $\boxed{+\frac{\pi}{18}\ ,\ +\frac{13\pi}{18}\ ,\ +\frac{25\pi}{18}}$, $+\frac{37\pi}{18}$, $+\frac{49\pi}{18}$, $+\frac{61\pi}{18}$ ….

… $-\frac{19\pi}{18}$, $-\frac{7\pi}{18}$, $\boxed{+\frac{5\pi}{18}\ ,\ +\frac{17\pi}{18}\ ,\ +\frac{29\pi}{18}}$, $+\frac{41\pi}{18}$, $+\frac{53\pi}{18}$, $+\frac{65\pi}{18}$ …

Fonction cosinus : $f : x \rightarrow f(x) = \cos(x)$.



Pour tout angle x , mesuré en radian, porté sur le cercle trigonométrique, à partir de l'origine A des angles, on fait correspondre l'extrémité $M(\cos x \,;\, \sin x)$ de l'angle x .

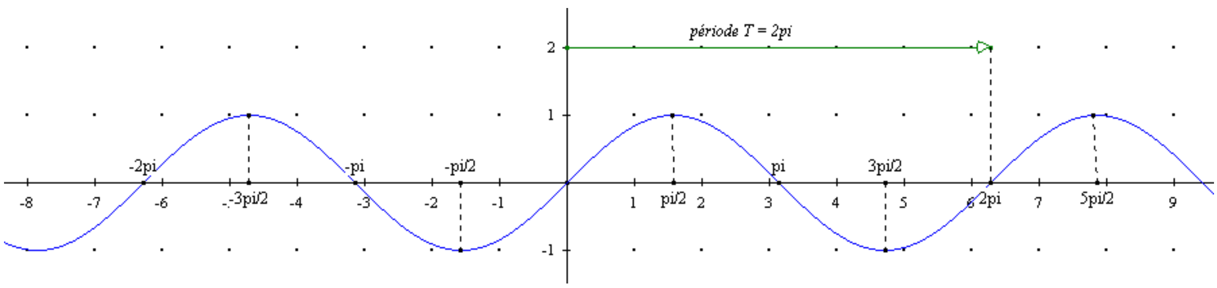
Pour tout x réel, l'*abscisse* de M , $\cos x$, est reportée en ordonnée sur le graphique précédent.

$$\left\{\begin{matrix} \cos(-2\pi) = \cos 0 = \cos 2\pi = \cos 4\pi \ldots = +1 \\ \cos(-3\pi) = \cos(-\pi) = \cos \pi = \cos 3\pi = -1 \end{matrix}\right\} \quad \text{et} \quad \cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{5\pi}{2} = 0 \,.$$

Pour tout x réel : $\cos(-x) = \cos x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

La fonction ***cosinus*** admet une *période* $T = 2\pi$, soit : $\cos[x + k(2\pi)] = \cos(x + 2k\pi) = \cos x$, quel que soit l'entier relatif $k \in \mathbb{Z}$.

Fonction sinus : $f : x \rightarrow f(x) = \sin(x)$.



Pour tout angle x , mesuré en radian, porté sur le cercle trigonométrique, à partir de l'origine A des angles, on fait correspondre l'extrémité $M(\cos x \,;\, \sin x)$ de l'angle x .

Pour tout x réel, l'*ordonnée* de M , $\sin x$, est reportée en ordonnée sur le graphique précédent.

$$\left\{\begin{matrix} \cos(-2\pi) = \cos 0 = \cos 2\pi = \cos 4\pi \ldots = +1 \\ \cos(-3\pi) = \cos(-\pi) = \cos \pi = \cos 3\pi = -1 \end{matrix}\right\} \quad \text{et} \quad \cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{5\pi}{2} = 0 \,.$$

Pour tout x réel : $\sin(-x) = -\sin x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

La fonction ***sinus*** admet une *période* $T = 2\pi$, soit : $\sin[x + k(2\pi)] = \sin(x + 2k\pi) = \sin x$, quel que soit l'entier relatif $k \in \mathbb{Z}$.