Définition de la période d'une fonction :

On appelle *Période* d'une fonction numérique f , la plus petite quantité T strictement positive, telle que

$$f(x + T) = f(x) \ , \ \forall x \in D_f$$

Le calcul rigoureux de la période d'une fonction n'est généralement pas chose aisée.

Il est conseillé de connaître le résultat des cas les plus courants :

$f(x) = \cos(ax + b)$ et $\sin(ax + b)$ admettent $T = \dfrac{2\pi}{| a |}$ pour période .

$f(x) = \tan(ax + b)$ admet $T = \dfrac{\pi}{| a |}$ pour période .

Ainsi : $f(x) = \sin(-3x + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$. Le graphe se reproduit, identique à lui-même, tout les $\frac{2\pi}{3}$.

On peut donc limiter l'étude à l'intervalle $I = [\ 0\ ; \frac{2\pi}{3}\ ]$, ou plus judicieusement à $[\ -\frac{\pi}{3}\ ; +\frac{\pi}{3}\ ]$, afin de profiter d'une éventuelle parité pour réduire encore l'intervalle d'étude à une $\frac{1}{2}$ période : $J = [\ 0\ ; \frac{\pi}{3}\ ]$.

De même : $g(x) = \dfrac{1}{\tan(2x - \frac{\pi}{4})}$ admet $T = \dfrac{\pi}{| a |} = \dfrac{\pi}{2}$ pour période.

Preuve théorique pour $f(x) = \cos (2x - \frac{\pi}{6})$:

Posons $f(x + T) = f(x)$, pour tout x réel .

$f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \cos [2(x + T) - \frac{\pi}{6}] = \cos (2x - \frac{\pi}{6})$.

On sait que $\cos X = \cos A \Leftrightarrow \begin{cases} X \equiv A\ [2\pi] \\ X \equiv -A\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x + T) - \frac{\pi}{6} \equiv 2x - \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \Leftrightarrow 2T \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow T \equiv 0\ [2\pi] \\ 2(x + T) - \frac{\pi}{6} \equiv -2x + \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \Leftrightarrow T \equiv -2x + \frac{\pi}{6}\ [\pi] \end{cases}$.

Dans le $2^{\text{ème}}$ cas , T dépend de x , ce qui n'est pas recevable pour une période.

Dans le 1^{er} cas, la plus petite valeur strictement positive est $T = \pi$, période de la fonction f .

Il est évidemment plus rapide d'utiliser : $f(x) = \cos (2x - \frac{\pi}{6})$ admet $T = \dfrac{2\pi}{|a|} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ pour période.