Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe :

Soit $z = a + ib$.

On sait que $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, *module de* z , exprime la longueur OM , pour $M(a\,;b)$ d'affixe z.

Il est généralement convenu de noter $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\overrightarrow{OM}\|$. (On note aussi $\rho = r$).

L'*angle polaire* de $\overrightarrow{OM}$, appelé *argument de z* , est l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM})\ [2\pi]$, qui mesure l'inclinaison de $\overrightarrow{OM}$.

Si P et Q sont les projections orthogonales de M sur $x'x$ et $y'y$, on a $\begin{cases} \overline{OP} = a = \|\overrightarrow{OM}\|.\cos\theta \\ \overline{OQ} = b = \|\overrightarrow{OM}\|.\sin\theta \end{cases}$.

Il est généralement convenu de noter $\theta = Arg(z) = (\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM})\ [2\pi]$, tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$.

Module et Argument de z

$$z = a + ib \Rightarrow \begin{cases} \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = Arg(z) \text{ tel que } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \end{cases}$$

Exemple 1 :

Soit $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, déterminer le module et un argument de z_1 .

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$. (longueur de OM)

$$\begin{Bmatrix} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] .\ \text{(angle polaire } (\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM}) \text{).}$$

Exemple 2 :

Soit le nombre complexe z de module $\rho = 1$ et d'argument $\theta = +\frac{\pi}{2}$.

Donner l'écriture algébrique de z .

$\cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \Leftrightarrow a = \rho\cos\theta$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \Leftrightarrow b = \rho\sin\theta$. Donc $z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 0 + 1i = i$.

Si $|z| = \rho$ et $Arg(z) = \theta$, il est courant de noter $z[\rho\,;\theta]$, de même que $z = a + ib$ peut se noter $z(a\,;b)$.

$$\boldsymbol{z\,[\rho\,;\theta] \Leftrightarrow z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = (\rho\cos\theta) + i(\rho\sin\theta) = \boldsymbol{a + ib = z\,(a\,;b)}$$

Formule de Moivre :

$$z\,[\rho\,;\theta] \text{ et } z'\,[\rho'\,;\theta'] \Rightarrow zz'\,[\rho\rho'\,;\theta+\theta']$$

ou encore

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta) \text{ et } z'=\rho'(\cos\theta'+i\sin\theta') \Rightarrow zz'=\rho\rho'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$$

on multiple les modules et on ajoute les arguments

Preuve :

$zz'=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\rho'(\cos\theta'+i\sin\theta')=\rho\rho'(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')$

$zz'=\rho\rho'(\cos\theta.\cos\theta'+i\sin\theta'.\cos\theta+i\sin\theta.\cos\theta'-\sin\theta.\sin\theta')$

$zz'=\rho\rho'[(\cos\theta.\cos\theta'-\sin\theta.\sin\theta')+i(\sin\theta.\cos\theta'+\sin\theta'.\cos\theta)]=\rho\rho'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$.

A partir de cette formule, il est aisé de déduire :

$$z\,[\rho\,;\theta] \Rightarrow z^n\,[\rho^n\,;n\theta] \quad \text{ou encore} \quad z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\ ,\ n\in\mathbb{N}$$

$$z\,[\rho\,;\theta] \Rightarrow \frac{1}{z}\left[\frac{1}{\rho}\,;-\theta\right] \quad \text{ou encore} \quad z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{\rho}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

Preuve :

Soit $z'=\frac{1}{z}=\rho'(\cos\theta'+i\sin\theta')$.

$zz'=z.\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow \rho(\cos\theta+i\sin\theta)\rho'(\cos\theta'+i\sin\theta')=1 \Leftrightarrow \rho\rho'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]=1=1(\cos 0+i\sin 0)$

Identification trigonométrique de deux nombres complexes $\left\{\begin{array}{l} z=z' \Leftrightarrow \rho=\rho' \\ \theta\equiv\theta'\ [2\pi] \end{array}\right.$.

On conclue : $\rho\rho'=1$ et $\theta+\theta'\equiv 0\ [2\pi]$, soit $\rho'=\frac{1}{\rho}$ et $\theta'\equiv-\theta\ [2\pi]$. Donc $\frac{1}{z}=\frac{1}{\rho}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))=\frac{1}{\rho}(\cos\theta-i\sin\theta)$.

On peut en déduire :

$$z\,[\rho\,;\theta] \Rightarrow z^p\,[\rho^p\,;p\theta] \quad \text{ou encore} \quad z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow z^p=\rho^p(\cos p\theta+i\sin p\theta)\ ,\ p\in\mathbb{Z}$$

Ainsi $z=\sqrt{3}+i=[2\,;\frac{\pi}{6}] \Rightarrow \frac{1}{z^3}=z^{-3}=[2^{-3}\,;-\frac{3\pi}{6}]=[\frac{1}{8}\,;-\frac{\pi}{2}]=\frac{1}{8}(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})=-\frac{i}{8}$.

Notation exponentielle de la formule de Moivre, dite Notation d'Euler :

La notation d'Euler n'est qu'une autre présentation de la formule : $z\,[\rho\,;\theta]$ et $z'\,[\rho'\,;\theta'] \Rightarrow zz'\,[\rho\rho'\,;\theta+\theta']$.

Faire le produit des modules et l'addition des arguments est similaire au comportement des puissances et exponentielles :

$ka^m\times k'a^{m'}=kk'a^{m+m'}$.

On pose $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ **, d'où :** $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta}$

Toutes les formules des puissances sont alors applicables :

$$z = \rho e^{i\theta}\ ,\ z' = \rho' e^{i\theta'} \Rightarrow zz' = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}\ ;\ z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta} \text{ et } \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

<u>*Remarque :*</u>

$$z = a + ib = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} \overline{z} = a - ib = \rho e^{-i\theta} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta) \\ -z = -a - ib = \rho e^{i(\pi + \theta)} = \rho(-\cos\theta - i\sin\theta) \end{cases} .$$

Exemple :

Soit $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

Donner la notation exponentielle de z_1 et z_2 . En déduire $Z = \dfrac{z_1^{\,4}}{z_2^{\,3}}$ sous sa forme algébrique.

$$z_1 = 1 - i \Rightarrow \rho_1 = |z_1| = \sqrt{2} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta_1 = \dfrac{a_1}{\rho_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{b_1}{\rho_1} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \text{ d'où } \theta_1 = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} .$$

$$z_2 = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow \rho_2 = |z_2| = \sqrt{4} = 2 \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta_2 = \dfrac{a_2}{\rho_2} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{a_2}{\rho_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \text{ d'où } \theta_2 = +\frac{\pi}{3} \Rightarrow z_2 = 2e^{i\pi/3} .$$

$$Z = \frac{z_1^{\,4}}{z_2^{\,3}} = \frac{(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^4}{(\,2e^{i\pi/3}\,)^3} = \frac{4e^{-i\pi}}{8e^{i\pi}} = \frac{4e^{i\pi}}{8e^{i\pi}} = +\frac{1}{2} .$$