Affixe d'un point du plan :

Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan,

A tout point $M(x\,;y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z_M = x + iy$ z_M est appelé *affixe* du point M.

Représentation d'un vecteur par des nombres complexes :

Si les points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ ont pour affixes respectives $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$,

le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par le nombre complexe $Z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$.

Le module $|z_B - z_A| = d(A\,;B) = \|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ est la distance AB.

On verra dans la définition trigonométrique des complexes que :

L'argument $Arg(z_B - z_A) = (\vec{i}\,;\overrightarrow{AB})\ [2\pi]$ est l'*angle polaire* de l'horizontale, orientée positivement, avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemples d'utilisation :

a) Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan,

Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que leur affixe z vérifie $|z + 1 - i| = \sqrt{2}$.

Soit le point $A(-1\,;1)$, donc d'affixe $z_A = -1 + i$.

$|z + 1 - i| = \sqrt{2}$ devient $|z - z_A| = \sqrt{2}$, soit $\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{2}$.

Le *lieu géométrique* des points M cherchés est le cercle (C), de centre $A(-1\,;1)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.

Vérification par le calcul :

$|z + 1 - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |(x + iy) + 1 - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |(x + 1) + i(y - 1)| = \sqrt{2}$.

Sachant que $z = a + ib \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, soit $|z|^2 = a^2 + b^2$, on déduit : $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$.

En rapprochant ce résultat de l'équation cartésienne d'un cercle :

$M(x\,;y) \in (C_{A,R}) \Leftrightarrow AM = R \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$.

L'égalité trouvée précédemment confirme que les points $M(x\,;y)$ décrivent le cercle (C), de centre $A(-1\,;1)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.

b) Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan,

Soit la transformation T du plan, telle que le point $M(x\,;y)$ d'affixe z admette pour image le point $M'(x'\,;y')$ d'affixe $z' = \dfrac{z}{z + 1}$.

Déterminer le lieu géométrique des points M dont l'image M' appartient au cercle centré à l'origine, de rayon $R = 1$.

Le point $M'(x'\,;y')$ doit vérifier $OM' = 1$, soit $|z' - z_O| = 1 \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z}{z + 1}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z|}{|z + 1|} = 1$, soit $|z| = |z + 1|$.

Interprétation géométrique :

$|z| = OM$ et $|z + 1| = |z - (-1)| = AM$ en posant $A(-1\,;0)$ point d'affixe $z_A = -1$.

$|z| = |z + 1| \Leftrightarrow OM = AM$, soit $MO = MA$.

Le point M qui doit être équidistant de O et A, est situé sur (D), *médiatrice du segment* $[OA]$.

Le lieu géométrique des points M cherchés est donc la droite $D \mid x = -\dfrac{1}{2}$.

Interprétation analytique :

$|z| = |z+1| \Leftrightarrow |z|^2 = |z+1|^2 \Leftrightarrow |x+iy|^2 = |(x+1)+iy|^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = (x+1)^2+y^2$.

On déduit $x^2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, quel que soit l'ordonnée y réelle.

Le lieu géométrique des points M cherchés est donc la droite $D \mid x = -\frac{1}{2}$.

c) Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan,

Soit la transformation T du plan, telle que le point $M(x\,;y)$ d'affixe z admette pour image le point $M'(x'\,;y')$ d'affixe $z' = 2iz + 1$.

- **1/ Rechercher les points invariants par T.**
- **2/ Déterminer les parties réelles x' et y' de l'image M' en fonction de x et y, celles de l'antécédent M.**
- **3/ En déduire l'image par T de la droite $D \mid y = 2x + 1$.**

1/ M invariant par $T \Leftrightarrow T(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z = 2iz + 1 \Leftrightarrow (1-2i)z = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)}$

$z = \frac{1+2i}{1+4} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. Le seul point invariant par T est $A(\frac{1}{5}\,; \frac{2}{5})$.

2/ $z' = 2iz + 1 \Leftrightarrow x' + iy' = 2i(x+iy) + 1 \Leftrightarrow x' + iy' = (1-2y) + 2ix$, d'où $\begin{cases} x' = 1-2y \\ y' = 2x \end{cases}$.

3/ $x' = 1 - 2y \Leftrightarrow y = \frac{1-x'}{2}$ et $y' = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y'}{2}$.

$M(x\,;y) \in (D) \Leftrightarrow y = 2x + 1$ d'où en reportant les résultats précédents : $\frac{1-x'}{2} = y' \Leftrightarrow y' = -\frac{x'}{2} + \frac{1}{2}$.

L'image de la droite (D) est la droite $D' \mid y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

<u>**Configurations remarquables :**</u>

$(ABCD)$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$.

I milieu de $[AB] \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

G centre de gravité du triangle $(ABC) \Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

<u>*Généralisation :*</u>

G barycentre de $\{(A\,;a), (B\,;b), (C\,;c)\}$, avec $a + b + c \neq 0$

$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{OG} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow z_G = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}$.

<u>*Alignement de Points :*</u>

(A, B, C) alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ avec $\boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow z_C - z_A = \lambda(z_B - z_A) \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}}$.

Si $\lambda > 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens,

Si $\lambda < 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraires.