Définition du nombre i :

Le nombre *imaginaire* i est défini tel que $i^2 = -1$. On ne sait rien de i , sinon que son carré est -1 .

Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

$\mathbb{C}$, est l'ensemble des nombres z , de la forme $z = a + ib$, pour toutes valeurs réelles de a et b .

On dit que $\mathbb{C}$ est le *plan complexe* , puisqu'il admet deux *degrés de liberté* réels, les choix libres de a et b .

$z_1 = 1 - 2i$; $z_2 = 4 + 0i = 4$; $z_3 = 0 - 5i = -5i$, sont des nombres complexes.

a s'appelle la *partie réelle* de z : $a = Re(z)$

b s'appelle la *partie imaginaire* de z : $b = Im(z)$

On remarquera que *la partie imaginaire est un nombre réel* : $b = Re(z) \in \mathbb{R}$.

Le seul nombre complexe nul est $0 = 0 + 0i$, donc : $\boldsymbol{z = a + ib = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = Re(z) = 0 \\ b = Im(z) = 0 \end{cases}}$

Opérations dans $\mathbb{C}$:

Addition : $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ $\Rightarrow$ $z + z' = (a + ib) + (a' + ib')$

$$\boldsymbol{z + z' = (a + a') + i(b + b')} .$$

Multiplication : $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ $\Rightarrow$ $zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + iba' + \underline{\boldsymbol{i^2}}bb'$

$$\boldsymbol{zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')} .$$

Sachant $i^2 = -1$:

$(1 - 3i)(2 + 4i) = 2 + 4i - 6i - 12\boldsymbol{i^2} = (2 + 12) + (4i - 6i) = 14 - 2i$.

Points $M(x\,;y)$ du plan affine et affixe correspondante $z_M = x + iy$:

A tout point $M(x\,;y)$, on fait correspondre un nombre complexe $z = x + iy$, appelé *affixe* z_M du point M .

$A(2\,;-3) \Leftrightarrow z_A = 2 - 3i$.

$B(x\,;0) \Leftrightarrow z_B = x + 0i = x$

- Les nombres x , **de partie imaginaire** y **nulle** , sont situés sur l'***axe réel*** $x'0x$.

$C(0\,;y) \Leftrightarrow z_C = 0 + iy = iy$

- Les nombres iy , **de partie réelle** x **nulle** , sont situés sur l'***axe imaginaire pur*** $y'0y$.

$\boldsymbol{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = b = 0 \quad ; \quad z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow Re(z) = a = 0}$

Egalité de deux nombres complexes :

Deux nombres complexes égaux, correspondent à un seul et même point du plan complexe, donc à des abscisses et ordonnées égales : $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$:

$\boldsymbol{z = z' \Leftrightarrow a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' & \text{(même partie réelle)} \\ b = b' & \text{(même partie imaginaire)} \end{cases}}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$, $(1 + i)z - 2i = 3 - 5i$.

Résolution primaire, en revenant aux parties réelles et imaginaire :

Soit $z = a + ib$: $(1 + i)z - 2i = 3 - 5i \Leftrightarrow (1 + i)(a + ib) - 2i = 3 - 5i$.

$$a + ib + ia + \boldsymbol{i^2} b - 2i = 3 - 5i \Leftrightarrow (a - b) + i(a + b - 2) = 3 - 5i$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes parties réelles et imaginaires

D'où $\left\{ \begin{array}{c} a - b = 3 \\ a + b - 2 = -5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a - b = 3 \\ a + b = -3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow a = 0$ et $b = -3$, soit $z = -3i$, imaginaire pur.

<u>Conjugué $\overline{z}$ et module $|z|$ du nombre complexe z :</u>

$$z = a + ib \Leftrightarrow \overline{z} = a - ib \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\overline{z}} = z \quad \text{puisque} \quad \overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = a + ib \\ \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \\ \overline{zz'} = \overline{z} \,.\, \overline{z'} \end{array} \right.$$

Les points M et M' d'affixes conjuguées l'une de l'autre sont symétriques par rapport à l'axe réel $x'x$.

$|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{(a + ib)(a - ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$. (il est judicieux de retenir que $z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

Si z est l'affixe de $M(x ; y)$, le module $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ mesure la norme $\|\overrightarrow{OM}\|$, distance OM .

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$, $(1 + i)z - 2i = 3 - 5i$.

Résolution rapide, en utilisant le conjugué du dénominateur :

$$(1 + i)z - 2i = 3 - 5i \Leftrightarrow (1 + i)z = 3 - 3i \Leftrightarrow z = \frac{3 - 3i}{1 + i} = \frac{(3 - 3i)\boldsymbol{(1 - i)}}{(1 + i)\boldsymbol{(1 - i)}} = \frac{(3 - 3i)(1 - i)}{1 + 1}$$

$$z = \frac{3 - 3i - 3i + 3i^2}{2} = \frac{3 - 3i - 3i - 3}{2} = -3i\ .$$

On ne laisse jamais de nombre complexe au dénominateur. L'utilisation de la quantité conjuguée de celui-ci permet de rendre le dénominateur réel.