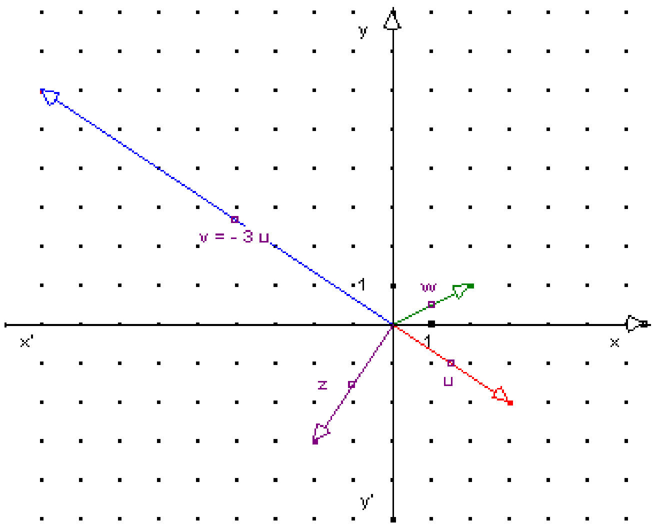
Déterminant et Produit Scalaire - Equations de droites du plan

Deux vecteurs sont *colinéaires* si et seulement si leur *déterminant* est *nul*.

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a\,b' - b\,a' = 0$$

Ainsi, $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix} = -9\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$ qui vérifient $\vec{v} = -3\,\vec{u}$ sont colinéaires, donc de même direction. Leur déterminant est nul : $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} +3 & -9 \\ -2 & +6 \end{vmatrix} = a\,b' - b\,a' = (3)(6) - (-9)(-2) = 0$

Par contre, $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\,\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -2\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$ ne sont pas multiples. *Ils sont libres et forment une base du plan.* Leur déterminant est non nul : $\det(\vec{w}\,;\vec{z}) = \begin{vmatrix} +2 & -2 \\ +1 & -3 \end{vmatrix} = a\,b' - b\,a' = (2)(-3) - (-2)(1) = -4$



Deux vecteurs sont *orthogonaux* si et seulement si leur *produit scalaire* est *nul*.

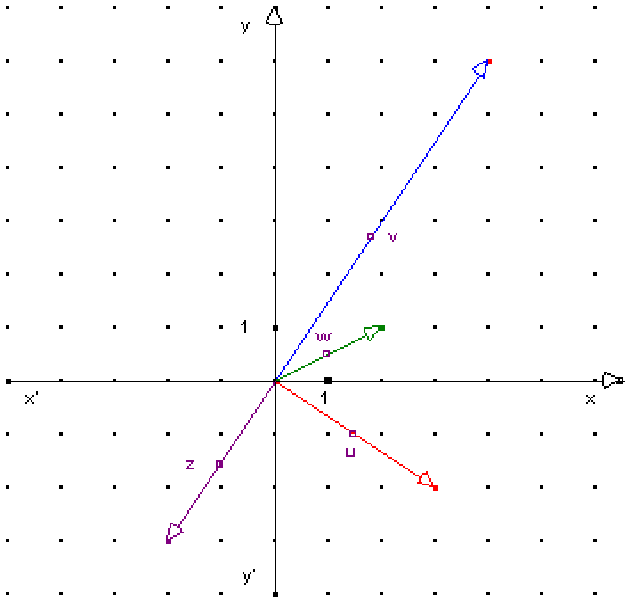
$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0 \Leftrightarrow a\,a' + b\,b' = 0$$

Ainsi, $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 4\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$ sont orthogonaux. Leur produit scalaire est nul :

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = a\,a' + b\,b' = (3)(4) + (-2)(6) = 0$

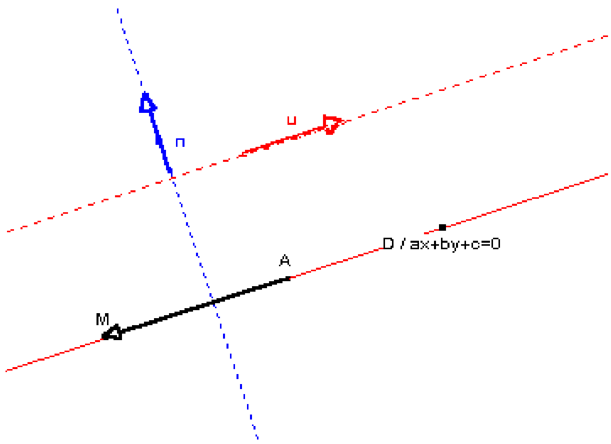
Par contre, $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\,\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -2\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$ ne le sont pas. Leur produit scalaire est non nul :

$\vec{w}\,.\,\vec{z} = a\,a' + b\,b' = (2)(-2) + (1)(-3) = -7$.



Equations Paramétriques et Cartésiennes de Droites :

Tant pour l'équation cartésienne que paramétrique, il faut exprimer le fait que M, situé sur (D), vérifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



***Equation Cartésienne* : Forme $\boldsymbol{D \mid a\,x + b\,y + c = 0}$**

$$M\,(x\,;y) \in (D) \iff (\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}) \text{ colinéaires} \iff \det(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x_M - x_A & a \\ y_M - y_A & b \end{vmatrix} = 0$$

Exemple : Soit la droite (D) passant par les points $A\,(2\,;-1)$ et $B\,(1\,;3)$:

$$M\,(x\,;y) \in (D) \iff (\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}) \text{ colinéaires} \iff \det(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x_M - x_A & x_B - x_A \\ y_M - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ y+1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

soit : $4(x-2) + (y+1) = 0.$

L'équation cartésienne de (D) est : $D \mid 4\,x + y - 7 = 0$, équation vérifiée par tous les points $M\,(x\,;y)$ de la droite (D).

Une *équation cartésienne* de droite est une *connaissance globale* de cette droite, par une équation que vérifient chacun de ses points.

Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes, toutes multiples les unes des autres :

$D \mid a\,x + b\,y + c = 0$ et $D \mid a'\,x + b'\,y + c' = 0$ représentent la même droite (D) ssi $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.

Ainsi, $D \mid\ 2\,x - 3\,y + 4 = 0$ et $D' \mid\ -6\,x + 9\,y - 12 = 0$ sont une seule et même droite affine du plan.

***Equation Paramétrique* : Forme** $D \left| \begin{array}{l} x = a + \lambda\, a' \\ y = b + \lambda\, b' \end{array} \right.\quad \forall\, \lambda \in R$

$$M\,(x\,;y) \in (D) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}) \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda\,\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x - x_A = \lambda\, a' \\ y - y_A = \lambda\, b' \end{array} \right.$$

Exemple : Recherche d'une équation paramétrique de la droite (D) précédente.

$M\,(x\,;y) \in (D) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB})$ colinéaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x - 2 = -\lambda \\ y + 1 = 4\,\lambda \end{array} \right.$

d'où une équation paramétrique de (D) : $D \left| \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 4\,\lambda \end{array} \right.\quad \forall\, \lambda \in R$

Remarque : Il est plus judicieux de parler *d'une équation paramétrique* que de *l'équation paramétrique*, puisque celle-ci change en choisissant un autre point B de la droite, ou en utilisant un autre vecteur directeur, multiple du premier.

Une *équation paramétrique* de droite est une *connaissance « point par point »* de cette droite. En changeant la valeur du paramètre λ, on change le point correspondant de celle-ci.

Vecteur Directeur et Vecteur Normal :

La droite $D \mid a\,x + b\,y + c = 0$ admet pour **vecteur directeur** $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, qui indique la direction de la droite, et pour **vecteur normal** $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, qui indique la direction perpendiculaire à la droite.

Preuve : Soit $A\,(x_A\,;y_A)$ et $M\,(x\,;y)$ deux points de la droite $D \mid a\,x + b\,y + c = 0$, dont ils vérifient l'équation :

$M\,(x\,;y) \in (D) \Leftrightarrow a\,x + b\,y + c = 0$

$A\,(x_A\,;y_A) \in (D) \Leftrightarrow a\,x_A + b\,y_A + c = 0$

Par soustraction, on obtient $a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) = 0$ que l'on peut traduire de deux façons :

$\begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{u}$ *colinéaires* ou bien : $a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \,.\, \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{n}$ *orthogonaux*.

Ainsi, la droite $D \,|\, 3\,x + y - 4 = 0$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ est perpendiculaire au vecteur

$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\,\vec{i} + \vec{j}$.

Norme d'un vecteur - Distance entre deux points

> Norme $\left|\vec{u}\right|$ d'un vecteur (sa longueur) : $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{u}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Remarque : $\left|\vec{u}\right|^2 = \vec{u} \,.\, \vec{u} = a^2 + b^2$. (Le carré de la norme d'un vecteur est égal au produit scalaire de ce vecteur par lui-même).

Exemple : **Equation cartésienne de la médiatrice du segment [*AB*] , avec *A* (2 ; -1) et *B* (-1 ; + 1)**

> Distance entre deux points : $d(A,B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Tout point de la médiatrice (*D*) du segment [*AB*] est équidistant des extrémités de ce segment.

$M\,(x\,;\,y) \in (D) \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{MB}\right|^2 \Leftrightarrow (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2$

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$

L'équation cartésienne de (*D*) est : $D \,|\, 6\,x - 4\,y - 3 = 0$.