Résumé

Vecteurs nuls :

Origine et extrémité confondues : $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$.

Vecteurs égaux :

Même direction (droites support parallèles), même sens , même longueur :

$(ABCD)$ parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Vecteurs opposés :

Même direction (droites support parallèles) , sens contraires, même longueur : Vecteurs opposés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Vecteurs colinéaires :

Même direction (droites support parallèles).

Les vecteurs sont multiples l'un de l'autre :

Vecteurs colinéaires ou *liés* $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$, avec k réel non nul.

Vecteurs libres :

Directions différentes (droites support non parallèles).

Vecteurs libres (*base* du plan) $\Leftrightarrow$ vecteurs non multiples

$\overrightarrow{CD} \neq k\,\overrightarrow{AB}$.

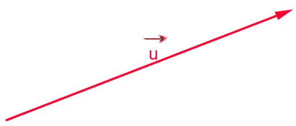
Relation de Chasles :

Somme de deux vecteurs $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

****

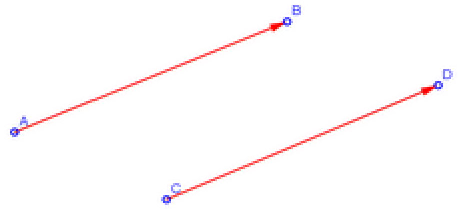
Définition d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan :

Un vecteur est défini par $\begin{cases} \textbf{\textit{sa direction (inclinaison de son support)}} \\ \textbf{\textit{sa longueur}} \\ \textbf{\textit{son sens}} \end{cases}$.



Un vecteur est une notion abstraite, qui ne peut se dessiner en soi.

La représentation d'un vecteur se fait par des bipoints $(A_{origine}\,,\,B_{extrémité})$ *, représentants du vecteur, tous de même direction, même sens et même longueur.*



Les bipoints $(A\,;B)$ *et* $(C\,;D)$ *sont deux représentants du même vecteur* $\overrightarrow{u}$.

ou

Les bipoints $(A\,;B)$ *et* $(C\,;D)$ *sont dits équipotents*

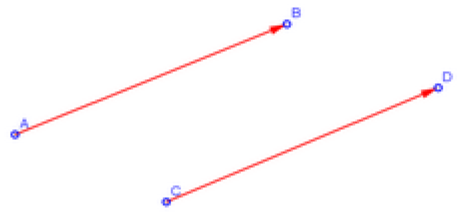
et les vecteurs dits égaux (notation d'usage, mais non rigoureuse)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{u}$$

Ce qui importe, c'est le déplacement que représente chaque vecteur (translation), et non pas sa position réelle (origine - extrémité)

Vecteurs égaux :

On devrait plutôt dire bipoints représentants d'un même vecteur (équipollents).

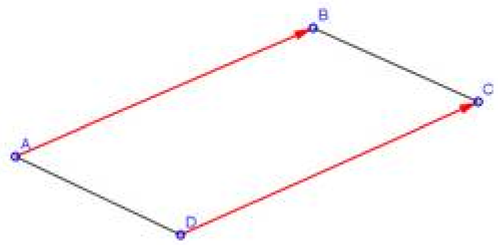


$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Même direction (droites support parallèles)

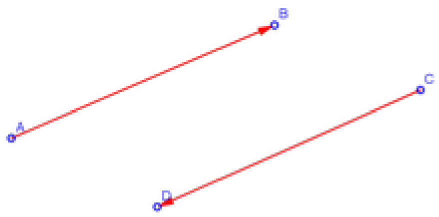
Même sens, Même longueur

<u>Remarque</u> : *Deux vecteurs égaux définissent un parallélogramme.*



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ $\Leftrightarrow$ **(ABCD)** *parallélogramme*

Vecteurs opposés :



$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

Même direction (droites support parallèles)

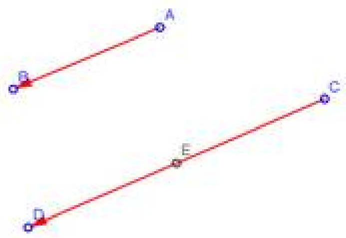
Même longueur

Sens contraire

Vecteur nul :

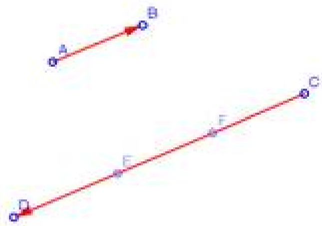
Origine et extrémité confondues : $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$.

Vecteurs colinéaires (multiples) :



$\overrightarrow{CD} = +2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$

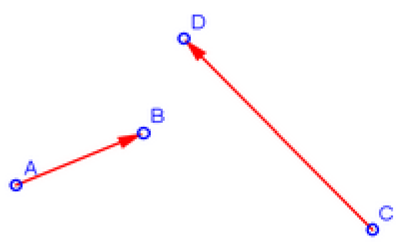
$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$, avec $k \in \mathbb{R}^*$

Même direction (droites support parallèles).

Vecteurs *colinéaires*, *multiples* ou *liés*.

Vecteurs libres (non colinéaires) :

Vecteurs non multiples, non liés. Ils forment une base $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD})$ *du plan.*

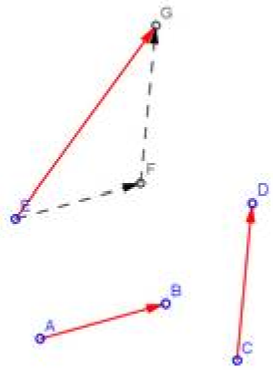


$\overrightarrow{CD} \neq k\overrightarrow{AB}$, quel que soit $k \in \mathbb{R}^*$

Directions différentes (droites support non parallèles)

Opérations de base sur les vecteurs :

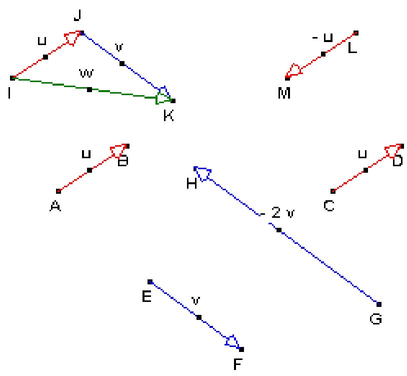
Produit d'un vecteur par un nombre réel : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$, avec $k \in \mathbb{R}^*$



Somme de vecteurs : $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$ *Relation de Chasles*

Exemple 1 : La figure ci-dessous permet d'affirmer :



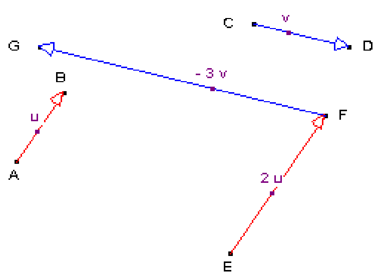
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{u}$ $\qquad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{LM} = -\overrightarrow{ML} = -\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{u}$ $\qquad \overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{v}$

Relation de Chasles : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$

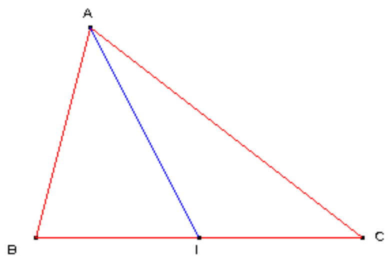
illustrée par $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{IK}$ ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IK}$.

Exemple 2 : A l'aide du graphique ci-dessous, où l'on connaît la position des points ***A, B, C, D, E*** , déterminer celle du point ***G*** tel que $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$.



Exemple 3 : Soit un triangle quelconque (ABC) et I milieu de $[BC]$.

Prouver que $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



$\begin{cases} \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \\ \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} \end{cases}$. Par addition : $\begin{cases} 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} \\ 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI}) \\ \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{0} \end{cases}$.

On obtient : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Le double du vecteur menant au milieu d'un segment
est égal à la somme des vecteurs
menant aux deux extrémités de ce segment

Coordonnées d'un point M du plan :

Soit un *repère* $\boldsymbol{R(O, I, J)}$ du plan. On choisit trois points O, I, J, non alignés, qui forment ainsi deux vecteurs *libres* :

$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$.

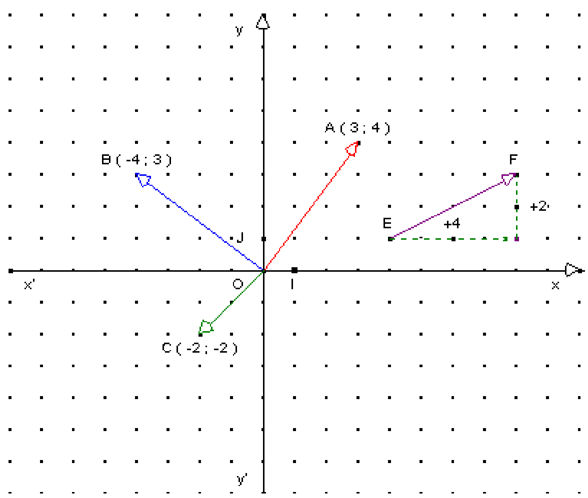
$\boldsymbol{R(O, I, J)}$, aussi noté $\boldsymbol{R(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}$, est un *repère* du *plan affine*.

$\boldsymbol{B(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}$, est une *base* du *plan vectoriel*.

Pour tout point M du *plan affine* (*points géométriques*), il existe deux nombres réels uniques, x et y, tels que : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$ ou $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

Ces valeurs x et y sont appelées *coordonnées* de M, noté $M_R(x\,;y)$ ou $M(x\,;y)$.

$\boldsymbol{M(x\,;y)}$ *dans le repère* $\boldsymbol{R(O, I, J)} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$



Ainsi : $B(-4\,;+3)$ dans $R(O,I,J)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OB} = -4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$.

Pour aller de O en B, on recule de 4 unités puis on monte de 3 unités.

Conséquence : **Coordonnées du milieu d'un segment**

> **I milieu du segment $[AB]$** $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$
>
> ***« Milieu = Demi somme des extrémités »***

$$2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},$$

$$2\,(x_I\overrightarrow{i} + y_I\overrightarrow{j}) = (x_A\overrightarrow{i} + y_A\overrightarrow{j}) + (x_B\overrightarrow{i} + y_B\overrightarrow{j}),$$

$$2\,(x_I\overrightarrow{i} + y_I\overrightarrow{j}) = (x_A + x_B)\overrightarrow{i} + (y_A + y_B)\overrightarrow{j},$$

$$(2x_I)\overrightarrow{i} + (2y_I)\overrightarrow{j} = (x_A + x_B)\overrightarrow{i} + (y_A + y_B)\overrightarrow{j}.$$

En identifiant les coefficients des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$: $\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \Leftrightarrow x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ 2y_I = y_A + y_B \Leftrightarrow y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$.

Composantes d'un vecteur du plan :

Relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B\overrightarrow{i} + y_B\overrightarrow{j}) - (x_A\overrightarrow{i} + y_A\overrightarrow{j}),$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\overrightarrow{j}.$$

> **Les *composantes d'un vecteur* se calculent selon la règle**
>
> ***« extrémité – origine »***
>
> $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\overrightarrow{j}$

L'usage veut que :

Les *coordonnées de points* s'écrivent *horizontalement* :

$$M(x\,;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

Les *composantes de vecteurs* s'écrivent *verticalement* :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$$

> *Composantes d'un vecteur* : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = (x_B - x_A)\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\overrightarrow{j}$

Ainsi : (graphique précédent)

$$E(4\,;1) \text{ et } F(8\,;3) \Rightarrow \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 4\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}\ .$$

Pour aller de E *en* F*, on avance de* 4 *puis on monte de* 2 .

Attention !

Dans de nombreux ouvrages, on parle de ***coordonnées de vecteurs*****, avec** ***notation horizontale*** **:** $\overrightarrow{EF}$ **(4 ; 2)** .

Exemple : Soit un repère orthonormé $R\ (O, I, J)$ et les points :

A **(2 ; 4)** , B **(6 ; 2)** et C **(0 ; -2)** .

Déterminer les coordonnées de D pour que le quadrilatère $(ABCD)$ soit un parallélogramme.

$$(ABCD) \text{ parallélogramme } \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\ ,$$

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_D \\ -2 - y_D \end{pmatrix},$$

D'où : $\begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = 0 \end{cases}$. Le point cherché est $D\,(-4\,;0)$.

Parallélisme de segments - Alignement de Points :

Deux segments sont parallèles, si et seulement si les vecteurs correspondants sont colinéaires. Si l'une des extrémités est commune aux deux vecteurs, les trois points sont alignés :

$$[AB]\ //\ [CD] \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$$

$$(A, B, C) \text{ alignés } \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$$

Si l'on dispose de coordonnées : **1ère méthode – Taux de croissance**

$$[AB]\ //\ [CD] \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_D - x_C = k(x_B - x_A) \\ y_D - y_C = k(y_B - y_A) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{y_D - y_C}{y_B - y_A} = \frac{x_D - x_C}{x_B - x_A} = k\ .$$

$$[AB]\ //\ [CD] \Leftrightarrow \frac{y_D - y_C}{y_B - y_A} = \frac{x_D - x_C}{x_B - x_A}$$

Si l'on dispose de coordonnées : **$2^{\text{ème}}$ méthode - Déterminant de deux vecteurs**

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\overrightarrow{u} \,;\, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Vecteurs libres $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CD} \neq k\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{AB} \,;\, \overrightarrow{CD}) \neq 0$

Vecteurs colinéaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{AB} \,;\, \overrightarrow{CD}) = 0$

Exemple : Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient les points $A(0, 2)$ et $B(-3, -6)$.

Déterminer l'intersection C de la droite (AB) avec l'axe des abscisses $x'x$.

Le point recherché est d'ordonnée nulle puisque sur $x'x$, disons $C(x, 0)$. Il doit aussi être aligné avec (A, B)

$1^{\text{ère}}$ méthode :

$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow \frac{0-2}{x-0} = \frac{-8}{-3} \Leftrightarrow -8x = +6 \Leftrightarrow x_C = -\frac{3}{4}.$$

Le point cherché est $C(-\frac{3}{4} ; 0)$.

$2^{\text{ème}}$ méthode :

$$\det(\overrightarrow{AC} \,;\, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_C - x_A & x_B - x_A \\ y_C - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -3 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0 \Leftrightarrow -8x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_C = -\frac{3}{4}.$$

Le point cherché est $C(-\frac{3}{4} ; 0)$.