I – Formule fondamentale des Probabilités

Soient A et B deux évènements éventuellement réalisables dans une expérience E ,
On note $A \cap B$ l'événement ' réaliser *simultanément* $\underline{A \text{ et } B}$ ',
On note $A \cup B$ l'événement ' réaliser *au moins l'un des deux* évènements $\underline{A \text{ ou } B}$ ' (*ou* non exclusif),

On sait que : $\boldsymbol{P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)}$. *P = Prob , qui peut aussi être noté p .*

II – Cas Particulier : Evènements Incompatibles entre eux dans une expérience

A et B sont dits *incompatibles entre eux* dans une expérience E , s'ils ne peuvent se réaliser simultanément dans cette expérience : $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$

Conclusion : (à partir de la formule générale)
Si deux *évènements* sont *incompatibles* dans l'expérience E , alors $\boldsymbol{P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)}$.

Conséquence : **Théorème des Probabilités totales**
Si l'événement A se décompose totalement en sous-évènements $\{ A_1 , A_2 , \dots , A_n \}$ incompatibles entre eux, formant ainsi une *partition* de A , alors : $\boldsymbol{P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)}$ **.**

Conséquence : **Probabilité de l'événement contraire**
L'événement A et son contraire $\overline{A}$, forment une partition de l'ensemble des éventualités de l'expérience E , noté Ω , lequel vérifie $P(\Omega) = 1$. (100% de chances de réaliser l'un des évènements de l'expérience E , en tentant l'expérience E ….. ce qui paraît évident !)

$P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$, sachant A et $\overline{A}$ incompatibles ente eux,

d'où : $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$ **.**
Si la probabilité de réussir un examen est de 70% , $p = 0{,}7$, celle de le rater est de 30% ($1 - p = 0{,}3$).

III –Evènements se réalisant dans des expériences successives

Soit E une *suite* d'expériences (E_1 , E_2 , E_3) .
Soit A l'évènement constitué de la *suite* d'évènements (A_1 , A_2 , A_3) , chaque A_i se réalisant dans la sous-expérience correspondante E_i ($1 \le i \le 3$) .

$$\boldsymbol{P(A) = P(A_1 , A_2 , A_3) = P(A_1) \times P_{A1} (A_2) \times P_{(A1 , A2)}(A_3)} \ .$$

Dans cette formule :

$P(A_1)$ est la probabilité de réaliser A_1 dans l'expérience E_1 ,

$P_{A1}(A_2)$ est la probabilité de réaliser A_2 dans l'expérience E_2 , **sachant $\boldsymbol{A_1}$ déjà réalisé,** donc en tenant compte de ses conséquences,

$P_{(A1 , A2)}(A_3)$ est la probabilité de réaliser A_3 dans l'expérience E_3 , sachant A_1 et A_2 déjà réalisés.

Remarque :

Suivant les années et les "modes", deux notations sont utilisées . $P_A(B)$ ou $P(B/A)$, lues "$p(B)$ sachant A réalisé".

<u>*Exemple*</u> 2 :

On tire *successivement* trois cartes d'un jeu de 32 , *sans remise* entre chaque tirage :

Calculer la probabilité d'obtenir *exactement* 3 Dames ?

$$P(D_1 , D_2 , D_3) = P(D_1) \times P_{D1}(D_2) \times P_{D1,D2}(D_3) = \frac{4}{32} \times \frac{3}{31} \times \frac{2}{30} .$$

Remarque : Si l'on demande la probabilité d'obtenir *au moins* trois Dames :

Toujours décomposer en cas incompatibles :

exactement 1 *Dame* + *exactement* 2 *Dames* + *exactement* 3 *Dames* ,

ou éventuellement, utiliser l'événement contraire :

1 – *exactement* 4 *Dames* .

<u>*IV – Tirages de Bernoulli*</u>

On appelle *Tirage de Bernoulli* (schéma ou situation de Bernoulli)**, la situation suivante :**

- ***n* expériences consécutives et identiques, *indépendantes* entre elles,**
- **un événement *A* de probabilité *p* dans chacune de ces *n* expériences,**
- **la variable aléatoire *X* qui mesure le nombre de réalisations de l'événement *A* dans la suite des *n* expériences :**

La probabilité P_k de réaliser exactement *k* fois l'événement *A* dans les *n* expériences ($0 \le k \le n$) , est :

$$\boldsymbol{P_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k.(1 - p^{n-k}) .}$$

Preuve :

Imposons aux k réalisations de A , de se produire lors des k premières expériences (il faut donc imposer à son événement contraire $\overline{A}$ de se produire lors des $n - k$ dernières expériences).

$$P = P(A , A , .. k \text{ fois} .., A, \overline{A} , \overline{A} , .. n - k \text{ fois} .. , \overline{A}) = p.p. .. k \text{ fois} .. p.(1 - p)(1 - p) .. n - k \text{ fois} .. (1 - p)$$

$$P = p^k(1 - p)^{n-k} .$$

Comme nous n'imposons pas de positionnement précis aux k réalisations de A , toutes les permutations de l'ordre précédent sont recevables, soit $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$ permutations, compte tenu des *doublons* (la combinaison $\dbinom{n}{k}$ est aussi notée C_n^k) .

On retrouve bien : $P_k = P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k(1 - p^{n-k})$.

<u>*Exemple 1*</u> :

On lance successivement un dé équilibré cinq fois.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 fois le "2" ?

On est dans une situation de Bernoulli :

- $n = 5$ expériences consécutives identiques (5 lancers de un dé),
- un événement A de probabilité $p = \dfrac{1}{6}$ dans chaque expérience (chaque face, équiprobable, a une probabilité de $\dfrac{1}{6}$ d'apparaître),
- $X = k = 4$ le nombre de réalisations attendues de l'évènement A .

$P(k = 3) = \binom{5}{4} p^4(1 - p)^{5-4} = 5\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 . \dfrac{5}{6} = \dfrac{25}{6^5} \approx 0{,}0032$ par défaut.

V – Loi Binomiale

On appelle *Loi Binomiale* , la loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui respecte les conditions d'un *Tirage de Bernouilli* :

On dit : $X = B(n\,;p)$ pour signaler que X suit la *loi Binomiale* de paramètres : aussi notée $X_n = B(n\,;p)$

n (nombre d'expériences)

k (nombres de réalisations de l'événement A)

La loi de probabilité P_k de réaliser exactement k fois l'événement A dans les n expériences, est :

$$P_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1 - p^{n-k}) \quad , \text{ pour } \quad 0 \leq k \leq n .$$

On dit "loi binomiale" car on retrouve là les coefficients du développement du binôme $(a + b)^n$.

Conséquence : En utilisant $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$, on peut montrer que :

L'espérance mathématique de la loi binomiale $X = B(n\,;p)$ est $E(X) = \overline{X} = n.p$

La variance de la loi binomiale $X = B(n\,;p)$ est $V(X) = \sigma^2 = np(1 - p) = n.p.q$

La courbe représentative d'une loi Binomiale est une courbe en cloche (*Gaussienne*) :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	0,004	0 031	0,109	0,219	0,273	0,219	0,109	0,031	0,004

On obtient la représentation de la loi binomiale $\mathscr{B}(8; 0,5)$ suivante :