I – Arrangements

On appelle *Arrangement* de n éléments, p à p $(0 \leq p \leq n)$, tout *classement* de p éléments, choisis parmi les n distincts possibles. [Un *arrangement* est un *classement partiel*]

Exemple 1 :

Soit $E_4 = \{ a ; b ; c ; d \}$

Recherche des arrangements de E_4, 3 à 3 :

1) On recense les *parties* non classées de 3 éléments de E_4 (combinaisons) :

$\{ a ; b ; c \}$, $\{ a ; b ; d \}$, $\{ a ; c ; d \}$, $\{ b ; c ; d \}$

2) On *permute* chaque combinaison :

$\{ a ; b ; c \} \Rightarrow (a ; b ; c) , (a ; c ; b) , (b ; a ; c) , (b ; c ; a) , (c ; a ; b) , (c ; b ; a)$

$\{ a ; b ; d \} \Rightarrow (a ; b ; d) , (a ; d ; b) , (b ; a ; d) , (b ; d ; a) , (d ; a ; b) , (d ; b ; a)$

$\{ a ; c ; d \} \Rightarrow (a ; c ; d) , (a ; d ; c) , (c ; a ; d) , (c ; d ; a) , (d ; a ; c) , (d ; c ; a)$

$\{ b ; c ; d \} \Rightarrow (b ; c ; d) , (b ; d ; c) , (c ; b ; d) , (c ; d ; b) , (d ; b ; c) , (d ; c ; b)$

E_4 admet 24 arrangements 3 à 3 .

Un ensemble non classé, dont les éléments sont seulement énumérés, est écrit entre accolades,

$E_4 = \{ a ; b ; c ; d \}$

Un ensemble classé, dont l'ordre d'écriture importe, est écrit entre parenthèses,

Couple (1er ; 2nd) : $(a ; b)$ - Triplet (1er ; 2nd ; 3ème) : $(\alpha ; \beta ; \gamma)$.

Le nombre d'arrangements p à p d'un ensemble de n éléments distincts est lu (A , n , p) et noté :

$A_n^p = n(n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)$, produit de p entiers consécutifs décroissants.

(A_n^p est noté *nPr* sur les calculatrices)

Dans l'exemple précédent : $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ arrangements 3 à 3.

Exemple 2 :

Une course de chevaux comporte 18 chevaux (donc tous distincts)

Un *tiercé* est un *classement* possible de 3 chevaux parmi les 18 possibles.

Il existe donc autant de *tiercés possibles* que *d'arrangements* de E_{18} , 3 à 3 :

$A_{18}^3 = 18 \times 17 \times 16 = 4.896$ tiercés différents.

On pourrait aussi dire : 18 choix du 1er .

Chacun des choix du 1er , s'associe à 17 choix du second, soit 18×17 couples (1er ; 2nd).

Chacun de ces couples s'associe à 16 choix du troisième, soit $18 \times 17 \times 16$ triplets (1er ; 2nd ; 3ème).

II – Cas particulier d' Arrangements - Les Permutations

On appelle *Permutation* de n éléments, p à p ($0 \leq p \leq n$), tout *classement* de la totalité des n éléments distincts possibles. [Une *permutation* est un *classement total*]

Exemple 3 :

Soit $E_3 = \{ a ; b ; c \}$:

Les permutations de E_3 sont les arrangements de E_3 , trois à trois, soit :

$\{ a ; b ; c \} \Rightarrow (a ; b ; c) , (a ; c ; b) , (b ; a ; c) , (b ; c ; a) , (c ; a ; b) , (c ; b ; a)$

E_3 admet 6 permutations.

Le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments distincts est lu (*factorielle* n) et noté :

$n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3.\ 2\ .\ 1$, produit des n entiers consécutifs de 1 à n .

Remarquer que : $n! = A_n^n = 1.2.3\ldots.(n-1).n$ (arrangements de tous les éléments)

Dans l'exemple précédent : E_3 admet $3! = A_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ permutations.

Autre présentation de la formule de $A_n^p = n(n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)$

$$A_n^p = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)(n-p)(n-p-1)\ldots 3\ .\ 2\ .\ 1}{(n-p)(n-p-1)\ldots 3\ .\ 2\ .\ 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Conséquence : **$0! = 1$** .

En effet : $n! = A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!}$ impose $0! = 1$.

Conséquence : **$(n+1)! = n!.(n+1)$**

$6! = 6.5.4.3.2.1 = 6.(5.4.3.2.1) = 6.(5!)$

Il est bon de savoir : $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

III – Cas particulier de Permutations - Les Permutations avec Doublons

On appelle *Permutation* avec doublons, tout permutation d'un ensemble E_n de n éléments, dont certains sont répétitifs.

Le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments, comportant des doublons, est égal au nombre des permutations de tous ses éléments, considérés comme distincts, divisé par le produit des factorielles du nombre des termes de chaque famille de doublons.

Exemple 4 :

$E_7 = \{ a ; a ; a ; b ; c ; d ; e \}$ admet deux familles de doublons, l'une de 3 éléments, l'autre de 2 éléments.

E_7 admet $\dfrac{7!}{3!2!} = \dfrac{7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 420$ permutations.

IV – Combinaisons

On appelle *Combinaison* de n éléments, p à p $(0 \le p \le n)$, toute *partie non classée* de p éléments, choisis parmi les n distincts possibles. [Une *combinaison* est un *groupement partiel*]

Exemple 5 :

Soit $E_4 = \{ a ; b ; c ; d \}$

Recherche des combinaisons de E_4, 3 à 3 :

Ce sont les *parties non classées* de 3 éléments de E_4 :

$\{ a ; b ; c \}$, $\{ a ; b ; d \}$, $\{ a ; c ; d \}$, $\{ b ; c ; d \}$

E_4 admet 4 combinaisons 3 à 3 .

Le nombre de combinaisons p à p d'un ensemble de n éléments distincts est lu « p parmi n » et noté :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{p(p-1)(p-2)\ldots 3.2.1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\ .$$

Autre notation, lue (C, n, p) : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ (*nCr* sur les calculatrices) .

Dans l'exemple précédent : $\binom{4}{3} = C_4^3 = \dfrac{A_4^3}{3!} = \dfrac{4.3.2}{3.2.1}$ = 4 combinaisons 3 à 3.

Conséquence : $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ ou encore $C_n^{n-p} = C_n^p$ **.**

Il existe autant de parties *(non classées) de p éléments parmi n distincts, que de* parties *des (n – p) éléments que l'on laisse alors de côté.*

Parmi 12 éléments, lorsque j'en prends 7 (non classés), j'en laisse 5 : $C_{12}^7 = C_{12}^{12\text{-}7} = C_{12}^5$.

Vérification : $\binom{12}{7} = C_{12}^7 = \dfrac{12!}{7!5!} = \dfrac{12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{7.6.5.4.3.2.1.5.4.3.2.1} = \dfrac{12.11.10.9.8}{5.4.3.2} = \binom{12}{5} = C_{12}^5$.

Il est bon de savoir
$$\begin{cases} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{soit} \quad C_n^0 = C_n^n = 1 \\ \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \text{soit} \quad C_n^1 = C_n^{n\text{-}1} = n \\ \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} \quad \text{soit} \quad C_n^2 = C_n^{n\text{-}2} = \dfrac{n(n-1)}{2} \end{cases} .$$

V – Triangle Pascal

Procédé qui permet de calculer les combinaisons, les unes à partir des autres.

Le triangle de Pascal est basé sur la formule : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$, encore présentée $\begin{matrix} C_n^p + C_n^{p+1} \\ \| \\ C_{n+1}^{p+1} \end{matrix}$, ou $\begin{matrix} \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \\ \| \\ \binom{n+1}{p+1} \end{matrix}$:

1	………………..	C_0^0
1 1	………………..	C_1^0 C_1^1
1 2 1	………………..	C_2^0 C_2^1 C_2^2
1 **<u>3</u>** **<u>3</u>** 1	………………..	C_3^0 $\underline{\mathbf{C_3^1}}$ $\underline{\mathbf{C_3^2}}$ C_3^3
1 4 **<u>6</u>** 4 1	………………..	C_4^0 C_4^1 $\underline{\mathbf{C_4^2}}$ C_4^3 C_4^4
1 5 10 10 5 1	………………..	C_5^0 C_5^1 C_5^2 C_5^3 C_5^4 C_5^5

On remarque en gras l'utilisation $\begin{matrix} C_3^1 + C_3^2 \\ \| \\ C_4^2 \end{matrix}$,

VI – Binôme de Newton

Développement des puissances d'une somme ou d'une différence

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{ou} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k} b^k \ .$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ .$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (-b)^k \ .$$

$$(a-b)^n = [a+(-b)]^n = \binom{n}{0} a^n (-b)^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} (-b)^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} (-b)^2 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 (-b)^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 (-b)^n \ .$$

$$(a-b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 - \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 - \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 - \binom{3}{3} a^0 b^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3 \ .$$