

Définition de la fonction logarithme népérien : $f(x) = \ln(x)$

f est définie sur \mathbb{R}^* par $f(1) = \ln(1) = 0$ et $f'(x) = (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout x réel strictement positif.

La fonction logarithme népérien a donc une dérivée strictement positive, en tout point.

Première conséquence : $[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$.

En effet : $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u' \Rightarrow (v \circ u)' = v'[u(x)] \times u'(x)$

Donc : $[\ln(u)]'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Conséquences Algébriques :

pour tout $a, b > 0$: $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Preuve :

Soit $g(x) = \ln(x \times b)$ avec b réel constant. On pose $u(x) = x \times b$, d'où $u'(x) = b$.

On a vu : $[\ln(u)]'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, donc $g'(x) = \frac{b}{x \times b} = \frac{1}{x} = \ln'(x)$.

Conséquence : Pour tout $x > 0$, $g'(x) - \ln'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) - \ln(x) = k \Leftrightarrow g(x) = \ln(x) + k$.

(Deux fonctions ayant même dérivée sont identiques à une constante près)

On déduit : $\ln(x \times b) = \ln(x) + k$ pour tout $x > 0$. D'où $\ln(1 \times b) = \ln(1) + k \Rightarrow k = \ln(b)$.

Conclusion : $\ln(x \times b) = \ln(x) + k = \ln(x) + \ln(b)$, soit la formule recherchée.

A partir de cette formule, nombre d'autres sont déductibles :

$0 = \ln(1) = \ln[a \times (\frac{1}{a})] = \ln(a) + \ln(\frac{1}{a}) \Rightarrow \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$.

pour tout $a > 0$: $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$

$\ln(\frac{a}{b}) = \ln[a \times (\frac{1}{b})] = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

pour tout $a, b > 0$: $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

Pour n entier naturel : $\ln(a^n) = \ln(a \times a \times \dots \times a) = \ln(a) + \ln(a) + \dots + \ln(a) = n \ln(a)$.

pour tout entier naturel n et tout $a > 0$: $\ln(a^n) = n \ln(a)$

Résumé des formules :

pour tout $a, b > 0$ et pour tout n entier naturel

$$\ln(1) = 0 ; \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) ; \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) ; \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) ; \ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\text{Dérivées : } \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad [\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$$

Sens de Variation :

On a vu que $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, d'où la *croissance stricte* de la fonction $\ln(x)$.

La fonction *logarithme népérien* est *strictement croissante* : $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$

Injektivité :

C'est une conséquence de la croissance stricte et de la continuité de la fonction logarithme. Celle-ci est continue car dérivable par définition.

La fonction *logarithme népérien* est *injective* : $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

Comportement aux bornes du domaine :

Soit $a > 1$, ce qui implique $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$, suivant les propriétés des suites géométriques de raison $q > 1$.

$a > 1 \Leftrightarrow \ln(a) > 0$ puisque $\ln(x)$ est une fonction croissante.

En posant $x = a^n$ qui tend vers $+\infty$ avec n , on peut conclure $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [n \ln(a)]$.

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} n \right] (\ln a) = +\infty$.

Soit maintenant $x \rightarrow 0^+$: Posons $X = \frac{1}{x}$, soit $X \rightarrow +\infty$.

On obtient : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = - \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Conséquence :

$\ln(x)$, fonction continue, prend des valeurs qui varient de $-\infty$ à $+\infty$, lorsque x croît de 0^+ à $+\infty$.

Ses valeurs prennent donc toutes les valeurs réelles.

Pour préciser : $0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < 0$, $\ln(1) = 0$, $x > 1 \Leftrightarrow \ln(x) > 0$.

Direction asymptotique pour $x \rightarrow +\infty$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, ce qui prouve que la pente au graphe devient nulle lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On déduit que le graphe du *logarithme népérien* admet une *branche parabolique* sur $x \times x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Bijection de la fonction logarithme népérien :

$\ln(x)$, continue et strictement croissante établit une *bijection* de $\mathbb{R}^* =]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

En conséquence, tout nombre réel y est le *logarithme népérien* d'un nombre réel unique $x > 0$.

On a vu que $0 < x < 1$ si $y < 0$ et $x > 1$ si $y > 0$.

Définition du nombre e :

La remarque précédente prouve qu'il existe un nombre $x > 0$ unique tel que $\ln(x) = 1$.

On appelle ce nombre e , seul nombre à vérifier $\ln(e) = 1$.

Il est bon de savoir que $e \approx 2,718...$ (nombre irrationnel)

Précisions sur les tangentes au graphe de $\ln(x)$:

On sait que l'équation de la tangente à G_f en $x = a$ est : $T_a | y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Tangente en $x = 1$: $T_1 | y = \ln'(1)(x - 1) + \ln(1)$, soit $T_1 | y = x - 1$.

La tangente en $x = 1$ est parallèle à la première bissectrice des axes.

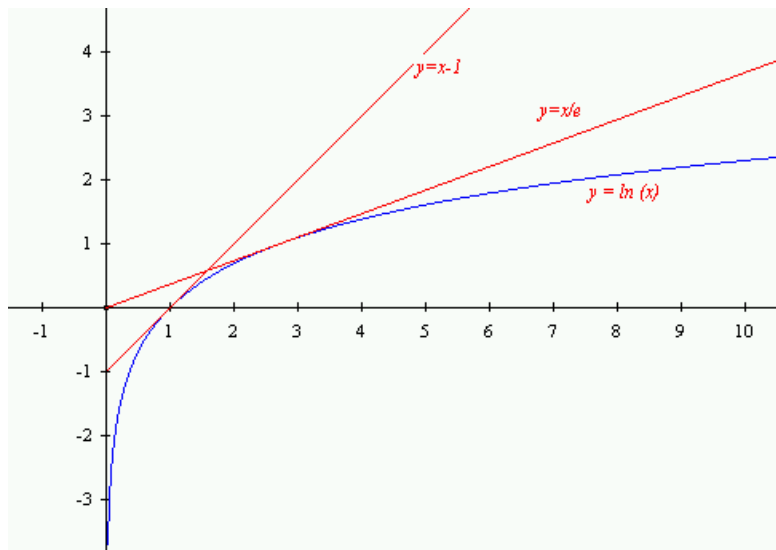
Tangente en $x = e$: $T_e | y = \ln'(e)(x - e) + \ln(e)$, soit $T_e | y = \frac{1}{e}(x - e) - 1 \Leftrightarrow T_e | y = \frac{1}{e}x$.

La tangente en $x = e$ passe par l'origine du graphe.

Tableau de Variation :

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$		+	1	+
$\ln(x)$	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow
			1	\nearrow
				$+\infty$

Graphe :



Cas d'indétermination entre $\ln(x)$ et les puissances de x lorsque x tend vers les bornes du domaine :

Si $x \rightarrow +\infty$, on a vu que $\ln(x) \rightarrow +\infty$, ce qui crée une indétermination de type $\frac{\infty}{\infty}$ pour $\frac{\ln(x)}{x}$.

On a également vu que si $x \rightarrow +\infty$, le graphe admet une branche parabolique sur l'axe $x'Ox$, ce qui signifie que la pente de la droite (OM) devient nulle lorsque l'abscisse x du point M , sur le graphe, devient infinie, soit:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+.$$

La croissance de $\ln(x)$ est infiniment plus lente que celle de x lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$

Si $x \rightarrow 0^+$, on a vu que $\ln(x) \rightarrow -\infty$, ce qui crée une indétermination de type $0 \times \infty$ pour $x \cdot \ln(x)$:

Sachant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$, on pose $X = \frac{1}{x}$, d'où $X \rightarrow +\infty$, dont on déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \cdot \ln\left(\frac{1}{X}\right) = - \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0^-.$$

La décroissance de $\ln(x)$ vers $-\infty$ est infiniment plus lente que celle de x vers 0^+ : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = 0^-$

Ces formules peuvent être généralisées aux puissances positives de x :

$$\text{Si } \alpha > 0 : \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

Cas d'indétermination entre $\ln x$ et x en $x = 1$: $\frac{\ln x}{x-1}$ est indéterminé de type $\frac{0}{0}$ en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Primitives et Intégrales de logarithmes népériens :

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C^e \quad ; \quad \int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C^e \quad ; \quad \int_a^b \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_a^b = \ln |b| - \ln |a|$$

On remarquera la présence des valeurs absolues dans les primitives :

En effet $\ln |u|$ a également pour dérivée $\frac{u'}{u}$ et constitue un cas plus général que $\ln u$.

Preuve :

$$\text{Si } u > 0, \text{ alors } (\ln |u|)' = (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

$$\text{Si } u < 0, \text{ alors } (\ln |u|)' = [\ln(-u)]' = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u} \text{ également.}$$