Statistiques

L'étude d'une distribution statistique suppose une *population* dont on analyse un *caractère* au travers d'un *échantillon* prenant un nombre fini de *valeurs* , chacune de ces valeurs ayant un *effectif* donné.

Ainsi, pour étudier le *nombre de voitures* par *famille* dans la commune de *Cléry en Vexin (95)*.

La *population* (ici confondue avec l'échantillon étudié) est l'ensemble des familles de la commune.

Le *caractère* étudié est le *nombre de voitures* par *famille*.

L'enquête menée a permis d'établir le tableau suivant :

Nbre Voitures	**0**	**1**	**2**	**3**
Effectif	**12**	**65**	**45**	**8**

Les *valeurs du caractère* sont (0 ; 1 ; 2 ; 3) , notées (x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4) , nombre de voitures par familles.

Les *effectifs relatifs à chaque valeur* sont respectivement (12 ; 65 ; 45 ; 8) , notés (n_1 ; n_2 ; n_3 ; n_4).

Fréquence de chaque valeur du caractère

Nbre voitures	**0**	**1**	**2**	**3**
Effectif	**12**	**65**	**45**	**8**
Fréquence	**12/130**	**65/130**	**45/130**	**8/130**

La *fréquence* d'une *valeur du caractère* est le *pourcentage* (probabilité) que représente l'effectif de cette valeur par rapport à *l'effectif total* de l'échantillon étudié.

Calcul de la moyenne et de l'écart-type.

Une distribution statistique est connue par sa *moyenne arithmétique* (indicateur de *valeur centrale*) qui donne un *point moyen* représentatif de l'ensemble de l'échantillon, mais également par son *écart-type* (indicateur de *dispersion*) qui exprime l'étalement de l'échantillon autour de sa moyenne.

Un élève qui a pour notes (6 ; 12 ; 15) a une *moyenne* de 11 , tout comme un élève noté (10 ; 11 ; 12) , mais la *dispersion* des notes du second élève est moindre que celle du premier.

Les deux informations (moyenne ; dispersion) sont nécessaires à la connaissance d'une distribution statistique.

Soit un *caractère* X dont on veut étudier une *répartition statistique* :

Soient $(x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_k)$ les k *valeurs* possibles du *caractère* étudié.

Soient $(n_1 , n_2 , n_3 , ... , n_k)$ les k *effectifs* correspondant à chacune des valeurs du caractère.

La *moyenne arithmétique pondérée* du caractère X est égale à la somme des produits des diverses valeurs du caractère par leur effectif propre $S = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + ... + n_k x_k$.

Cette somme est ensuite divisée par l'effectif total $N = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$.

$$\overline{X} = \frac{S}{N} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k} .$$

Un savant calcul mathématique estime l'*écart-type* σ (*sigma*) , qui mesure la dispersion de l'échantillon autour de sa *moyenne* , par la formule :

$\sigma = \sqrt{V}$ ou $V = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$ est appelée *variance* , formule où $\overline{X^2} = \dfrac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots + n_k x_k^2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$, est la *moyenne des carrés des valeurs* , et où $(\overline{X})^2$ est le *carré de la moyenne* des valeurs vues précédemment.

On dit souvent $\sigma = \sqrt{\overline{X^2} - (\overline{X})^2}$ = *Racine de (moyenne des carrés* moins *carré de la moyenne)*.

x_i	n_i	$n_i\, x_i$	$n_i\, x_i^2$
0	12	0	0
1	65	65	65
2	45	90	180
3	8	24	72
	130	**179**	**317**

L'effectif total est $N = \sum_{i=1}^{4} n_i = 130$, d'où $\sum_{i=1}^{4} n_i\, x_i = 179$, d'où:

$\overline{X} = \dfrac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{4} n_i\, x_i\right) = \dfrac{179}{130} = 1{,}38$ voitures par famille .

$\sum_{i=1}^{4} n_i\, x_i^2 = 317$. La *moyenne des carrés* est : $\overline{X^2} = \dfrac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{4} n_i\, x_i^2\right) = \dfrac{317}{130} = 2{,}44$.

La *variance* : $V = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 = 2{,}44 - (1{,}38)^2 = 0{,}536$.

L'*écart-type* : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{0{,}536} = 0{,}73$ voiture .

Comparaison de la dispersion de deux caractères statistiques dissemblables – Coefficient de Variation

Pour comparer la dispersion de deux caractères *identiques* dans deux populations différentes, il suffit de comparer les *écarts-type* de ces deux populations.

Ainsi, dans l'exemple précédent : $\sigma_1 = 0{,}73$ voiture à Cléry en Vexin , et $\sigma_2 = 0{,}81$ voiture à Pontoise , permettent de conclure en termes de dispersion.

Par contre : Comparer les dispersions entre "le nombre de voitures par foyer" et "le nombre d'arbres par jardin" ne peut se limiter à la consultation des écarts-type : $\sigma_1 = 0{,}73$ voiture et $\sigma_2 = 1{,}23$ arbres.

Pour comparer la dispersion de deux caractères différents, on utilise le Coefficient de Variation : $CV = \dfrac{\sigma}{\overline{X}}$.

Le *Coefficient de Variation* est un nombre sans unité.

Nombre de voitures par foyer : $\overline{X_1} = 1{,}38$ voitures , $\sigma_1 = 0{,}73$ voiture $\Rightarrow CV_1 = \dfrac{\sigma_1}{\overline{X_1}} = \dfrac{0{,}73}{1{,}38} \approx 0{,}529$.

Nombre d'arbres par jardin : $\overline{X_2} = 2{,}41$ arbres , $\sigma_2 = 1{,}23$ arbres $\Rightarrow CV_2 = \dfrac{\sigma_2}{\overline{X_2}} = \dfrac{1{,}23}{2{,}41} \approx 0{,}510$.

Contrairement à ce que l'on pouvait penser, ce second caractère est le moins dispersé autour de sa moyenne.

***Autres indicateurs de Valeur Centrale* :**

- Le Mode *Mo* : Valeur du caractère de plus forte fréquence (valeur à la mode)

Lorsque la population est rangée en classes, on parlera de Classe Modale .

- La Médiane *Me* : Valeur du caractère qui sépare la population en deux sous-populations de même effectif.

50% de la population telle que $x_i < Me$ et 50% de la population telle que $x_i > Me$.

Pour déterminer graphiquement la *Médiane* , on trace le *polygone des fréquences cumulées* .

La valeur de *Me* correspondant à la valeur d'ordonnée de 0,50 = 50%.

***Autres indicateurs de Position* :**

- Les Quartiles Q_1 , Q_3 :

Q_1 , 1er quartile d'une série statistique, plus petite valeur du caractère étudié telle qu'au moins 25% des données soient inférieures à ce nombre.

Q_3 , 3ème quartile d'une série statistique, plus petite valeur du caractère étudié telle qu'au moins 75% des données soient inférieures à ce nombre.

On remarquera que $Q_2 = Me$ (médiane), 2nd quartile d'une série statistique, plus petite valeur du caractère étudié telle qu'au moins 50% des données soient inférieures à ce nombre.

- Les Déciles D_1 , D_2 , … , D_9 :

D_1 , 1er décile d'une série statistique, plus petite valeur du caractère étudié telle qu'au moins 10% des données soient inférieures à ce nombre.

D_2 , 2ème décile d'une série statistique, plus petite valeur du caractère étudié telle qu'au moins 20% des données soient inférieures à ce nombre.

……..

D_9 , 9ème décile d'une série statistique, plus petite valeur du caractère étudié telle qu'au moins 90% des données soient inférieures à ce nombre.

On remarquera que $D_5 = Me$ (médiane), 5ème décile d'une série statistique, plus petite valeur du caractère étudié telle qu'au moins 50% des données soient inférieures à ce nombre.

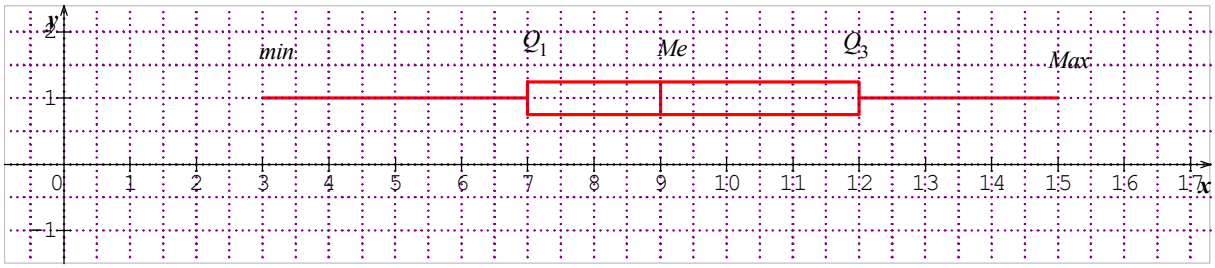
***Autres indicateurs de Dispersion* :**

- Etendue *e* : Différence $e = Max - min$, entre la valeur Maximum et la valeur minimum du caractère étudié.
- Intervalle Interquartile $Q_3 - Q_1$: Différence entre le 1er quartile et le 3ème quartile, écart dans lequel se trouvent les 50% centrales des valeurs du caractère (25% avant Q_1 et 25% après Q_3).

***Diagramme en Boite (boite à moustache ou diagramme de Tuckey)* :**

Le diagramme en boite représente graphiquement les principaux indicateurs de position d'une série statistique :

min , Q_1 , *Me* , Q_3 , *Max* .



Le diagramme en boite peut aussi inclure le 1er décile D_1 (10% des valeurs lui sont inférieures, et le 9ème décile D_9 (10% des valeurs lui sont supérieures):