Suites numériques - Forme *fonctionnelle* ou *récurrente*.

On appelle ***suite numérique*** toute fonction $u : n \in \mathbb{N} \rightarrow u(n) \in \mathbb{R}$.

Autrement dit : Toute fonction f peut devenir ***suite*** . Il suffit que son domaine de définition soit $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels.

Ainsi :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$ devient $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $u(n) = \dfrac{2n - 3}{n + 1}$.

L'usage veut que l'image $u(n)$ soit notée u_n (u indice n) :

$u_0 = -3$, $u_1 = -\dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{3}$, $u_3 = \dfrac{3}{4}$ ......

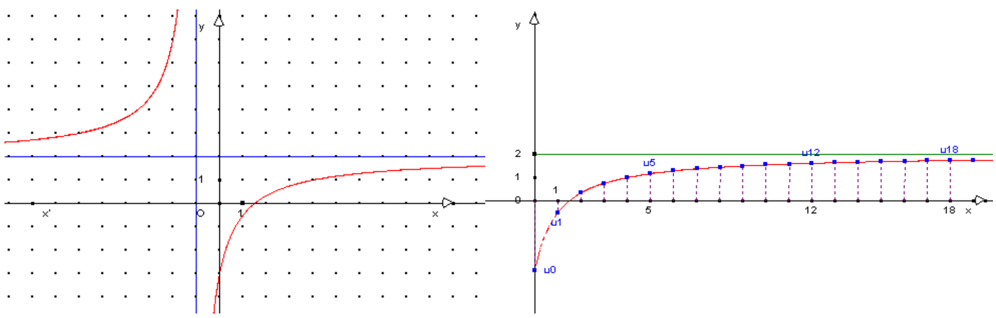
Une *suite* est sous *forme fonctionnelle* si la formule proposée pour u_n est directement transposable en écriture « fonction », donc permet le *calcul immédiat de* u_n *pour toute valeur de* n.

$u_n = \dfrac{2n - 3}{n + 1}$ est une forme fonctionnelle : $u_{23} = \dfrac{43}{24}$.

Graphe d'une suite (courbe représentative) - forme fonctionnelle : $u_{n+1} = f(n)$.

A l'identique des fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une suite numérique possède une représentation graphique, constituée des seuls points d'abscisses entières $x = n$.

Exemple : Graphe de $u_n = \dfrac{2n - 3}{n + 1}$. On l'extrait de celui de $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$.



Une *suite* est sous *forme récurrente* si la formule proposée pour u_n n'est pas directement transposable en écriture « fonction », et ne permet le *calcul de* u_n *que de proche en proche*, à partir des ordres précédents.

$u_n = 2u_{n-1} + 1$ est une forme récurrente. Chaque terme est le double de celui qui le précède, augmenté de **1**.

Si $u_0 = -3$, on déduit $u_1 = 2u_0 + 1 = -5$, $u_2 = 2u_1 + 1 = -9$, $u_3 = 2u_2 + 1 = -17$ .....

Pour amorcer une suite récurrente, il faut en connaître un ou plusieurs termes, et la façon de passer d'un ou plusieurs termes de la suite à leur successeur (relation de récurrence).

La majorité des problèmes de *suites* , consiste à retrouver l'écriture *fonctionnelle* , à partir de l'écriture *récurrente*.

Une suite sous forme récurrente n'étant qu'une autre présentation d'une suite fonctionnelle, elle admet également un graphe, mais il faut calculer, de proche en proche, chaque *ordonnée* u_n pour chaque *abscisse* n .

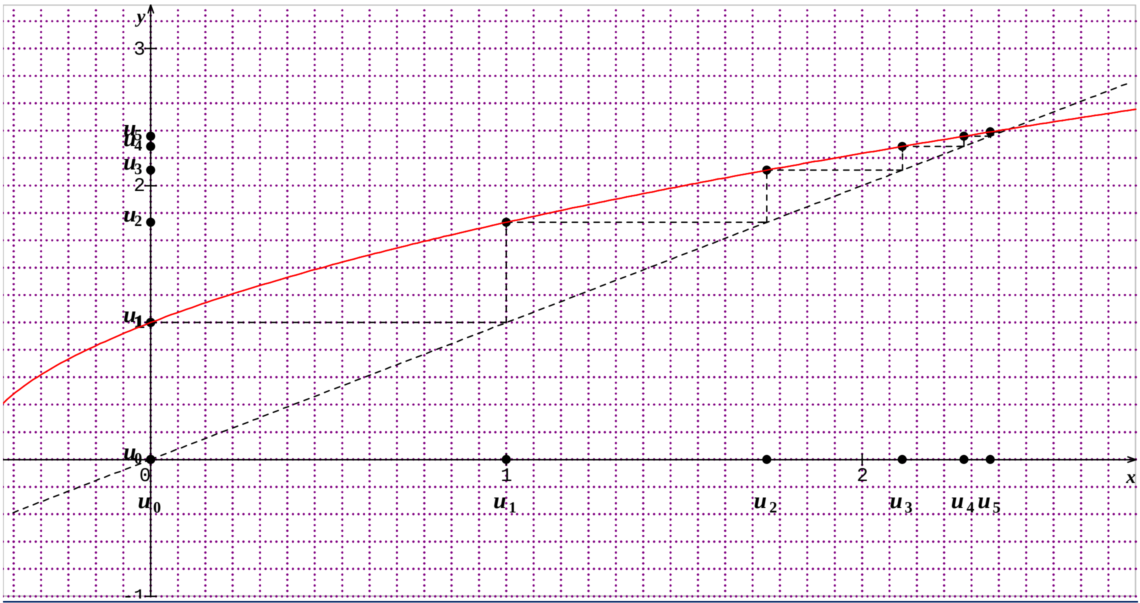
Graphe d'une suite (courbe représentative) - forme récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$ + valeur de départ u_0 ou u_1 .

On trace le graphe de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ainsi que la 1ère bissectrice des axes $y = x$.

- Partant de l'abscisse u_0 (par exemple), on cherche son ordonnée $u_1 = f(u_0)$ à la verticale, sur C_f .
- On même ensuite l'horizontale jusqu'à couper $y = x$ en $M_1(u_1 ; u_1)$ (u_1 en abscisse et en ordonnée).
- On même ensuite la verticale jusqu'à l' ordonnée $u_2 = f(u_1)$ à la verticale, sur C_f .
- On même ensuite l'horizontale jusqu'à couper $y = x$ en $M_2(u_2 ; u_2)$ (u_2 en abscisse et en ordonnée).
- On réitère le processus pour les autres valeurs de u_n .

On peut éventuellement constater que les valeurs de u_n s'accumulent au point $E(L ; L)$ d'intersection entre C_f et la bissectrice $y = x$. On peut alors affirmer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Exemple : Soit la suite u telle que $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$, avec $u_0 = 0$. Tracer la courbe représentative de u :



On constate que la suite u est ***croissante*** , ***bornée par*** 0 ***et*** $L = 1 + \sqrt{2}$ ***limite de la suite, solution de*** $f(x) = x$ **.**

Suite monotone :

Une suite numérique est dite ***monotone*** (croissante ou décroissante) si la progression de ses termes successifs l'est, c'est à dire ne s'inverse jamais.

u ***croissante*** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} - u_n \geq 0$ $\forall n \in N$.

u ***décroissante*** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} - u_n \leq 0$ $\forall n \in N$.

Soit $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$, vérifions que u est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-3}{(n+1)+1} - \frac{2n-3}{n+1} = \frac{2n-1}{n+2} - \frac{2n-3}{n+1} = \frac{(2n-1)(n+1)-(2n-3)(n+2)}{(n+2)(n+1)},$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+1)(n+2)}.$$

Le résultat est positif pour tout entier positif n .

D'où : $u_{n+1} - u_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \iff$ ***u croissante.***

Le graphe ci-dessus de la suite vérifie ce résultat, on constate bien que les valeurs u_n croissent avec n , et on les voit se bloquer sur la hauteur $y = 2$ de l'asymptote horizontale, ce dont on parlera plus bas.

Suite majorée , minorée , bornée :

Une suite est dite ***majorée*** (ou ***minorée***) si et seulement si tous ses termes u_n restent ***inférieurs*** (ou ***supérieurs***) à une quantité A appelée ***Majorant*** (ou ***minorant***) de la suite.

> ***u majorée par A*** $\iff u_n \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
>
> ***u minorée par B*** $\iff u_n \geq B \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
>
> ***u bornée par A et B*** $\iff A \leq u_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Vérifions, pour la suite précédente, qu'elle est majorée par **2** , comme l'exprime son graphe.

Pour des commodités de calcul, plutôt que de montrer $u_n \leq 2$, on compare à **0** ,

soit $u_n - 2 \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$u_n - 2 = \dfrac{2n-3}{n+1} - 2 = \dfrac{(2n-3)-2(n+1)}{n+1} = -\dfrac{5}{n+1} \leq 0$ pour tout entier naturel n .

La suite est majorée par 2 . *Toute valeur supérieure à 2 est également majorant de la suite, mais son graphe semble indiquer que 2 est le plus petit de ces majorants.*

Convergence - Divergence d'une suite numérique :

> Si, lorsque l'ordre n s'accroît jusqu'à devenir infini, les termes u_n de la suite se concentrent sur une valeur L jusqu'à se confondre avec elle, la suite est dite ***convergente vers L*** , ce que l'on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

(qui est lu : « limite de u_n égal L »).

Pour $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$, selon le rapport des plus hauts degrés, on vérifie $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Si, au contraire, les termes u_n tendent vers l'infini lorsque $n \to +\infty$, la suite est dite ***divergente***.

Cas particuliers de suites numériques :

A/ Les suites arithmétiques

> Une suite numérique u est dite ***arithmétique*** si et seulement si chacun de ses termes est égal au précédent ***augmenté*** d'une valeur constante r appelée ***raison*** de la suite.
>
> ***u arithmétique*** $\iff u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r = C^{te}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ainsi **(-7,-3,+1,+5,+9,+13 .....)** forment une suite arithmétique de raison $r = +4$.

Exemple : Soit u telle que $u_n = 1 + 2n$ (forme *fonctionnelle*) . Montrons que u est arithmétique.

$u_{n+1} - u_n = [1 + 2(n+1)] - (1 + 2n) = +2$. La suite u est arithmétique, de raison $r = +2$.

Relation entre deux termes d'une suite arithmétique : $u_n = u_p + (n - p).r$

Ainsi $u_7 = u_6 + r$, $u_{12} = u_5 + 7r$, $u_8 = u_{21} - 13r$. (Il suffit d'ajuster le nombre de raisons entre n et p).

Présentation récurrente d'une suite arithmétique

Il faut connaître ***un terme*** , pour amorcer la récurrence, et sa ***raison*** , pour passer d'un terme au suivant :

Exemple : $\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$, suite arithmétique de raison $r = +5$.

Présentation fonctionnelle d'une suite arithmétique

Par la relation exprimant un terme u_n en fonction d'un autre u_p , on calcule en général le terme *général* u_n de la suite, en fonction du premier terme u_1 ou u_0 de cette suite :

$$u_n = u_0 + n.r \quad \text{ou} \quad u_n = u_1 + (n - 1).r$$

Exemple précédent : $u_n = u_1 + (n - 1).r = -4 + 5(n - 1)$, soit : $u_n = 5n - 9 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

On remarquera que la présentation *fonctionnelle* d'une suite arithmétique est une fonction *affine* , et son graphe une *droite* de coefficient directeur $a = r$ (raison de la suite) : $u_n = a.n + b \Leftrightarrow y = a\,x + b$.

Le graphe d'une suite ***arithmétique*** est une *droite*, *décroissante* si $r < 0$, *croissante* si $r > 0$, *horizontale* , donc *constante* , si $r = 0$.

Une suite arithmétique non constante ($r \neq 0$) est *toujours divergente.*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \text{ si } r < 0 \text{ (droite décroissante)} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ si } r > 0 \text{ (droite croissante)} \end{cases}$$

Suite arithmétique de 3 termes : (a , b , c) *suite arithmétique* $\Leftrightarrow 2\,b = a + c$

$b = a + r$ et $b = c - r$ entraînent $2\,b = a + c$. La valeur b est le milieu de $[a , c]$.

Somme des termes d'une suite arithmétique finie :

On démontre par récurrence :

$$u \text{ suite } \textit{arithmétique} \Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \; .$$

La formule est *dangereuse* :

Se souvenir que n est le ***nombre de termes*** , $(u_1 + u_n)$ la ***somme des 2 termes extrêmes.***

Ainsi : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = \dfrac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$, car il y a $(n + 1)$ termes.

Ecrire « S_n » peut signifier tout autant « n est le nombre de termes » que « le dernier terme est u_n ».

Exemple : Nous savons que $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots.. + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, ce que confirme la formule précédente, puisqu'on a affaire à une suite arithmétique de n termes, de 1er terme $u_1 = 1$ et dernier terme $u_n = n$. La raison est $r = +1$.

B/ Les suites géométriques

Une suite numérique u est dite ***géométrique*** si et seulement si chacun de ses termes est égal au précédent ***multiplié*** par une valeur constante $q \neq 0$, appelée ***raison*** de la suite.

$$u \text{ géométrique} \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \,.\, q \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = q = C^{te} \;,\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi $(-16, +4, -1, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, +\frac{1}{64} .....)$ forment une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$.

Exemple : Soit u telle que $u_n = 3.(2^n)$ (forme *fonctionnelle*). Montrons que u est géométrique.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3.(2^{n+1})}{3.(2^n)} = +2$. La suite u est géométrique, de raison $q = +2$.

Relation entre deux termes d'une suite géométrique : $u_n = u_p \,.\, q^{(n-p)}$

Ainsi $u_4 = u_3 \,.\, q$, $u_9 = u_5 \,.\, q^4$, $u_6 = u_8 \,.q^{-2} = \frac{u_8}{q^2}$. (Il suffit d'ajuster, dans la puissance, le nombre de raisons entre n et p).

Présentation récurrente d'une suite géométrique

Il faut connaître ***un terme***, pour amorcer la récurrence, et la ***raison***, pour passer d'un terme au suivant :

Exemple : $\begin{cases} u_0 = +3 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n \end{cases}$, suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

Présentation fonctionnelle d'une suite géométrique

Par la relation exprimant un terme u_n en fonction d'un autre u_p, on calcule en général le terme *général* u_n de la suite, en fonction du premier terme u_1 ou u_0 de cette suite.

$$u_n = u_0.q^n \quad \text{ou} \quad u_n = u_1.q^{n-1}.$$

Exemple précédent : $u_n = 3.(-\frac{1}{2})^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Attention* : « **-1** » doit rester dans la puissance.

Convergence ou Divergence d'une suite géométrique :

Si $|q| < 1$, la suite ***géométrique*** est ***convergente* vers 0** : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Si $|q| > 1$, la suite ***géométrique*** est ***divergente*** : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$

Multiplier par **-0,5** revient à diviser par **-2**, et multiplier par **+0,33** à diviser par +3 .

Donc ***multiplier*** par q tel que $|q| < 1$ équivaut à ***diviser***, ce qui justifie qu'en définitive $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exemple : $(-16, +4, -1, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, +\frac{1}{64} .....) \to 0$, avec $q = -\frac{1}{4} = -0{,}25$.

A l'inverse : Multiplier par **-3** ou par **+2**, soit par q tel que $|q| > 1$, rend les termes de la suite de plus en plus grands en valeur absolue, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$. *Exemple* : $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -4, -8 .....) \to -\infty$, avec $q = +2$.

Suite géométrique de 3 termes : (a, b, c) **sont en suite** ***géométrique*** $\Leftrightarrow$ $b^2 = a \cdot c$

$b = a \cdot q$ et $b = \dfrac{c}{q}$ entraînent bien $b.b = (a \cdot q)(\dfrac{c}{q})$, soit $b^2 = a.c$.

Somme des termes d'une suite géométrique finie :

On démontre par récurrence :

$$u \text{ suite géométrique} \Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q} \text{ , si } q \neq 1.$$

La formule est *dangereuse* :

Se souvenir que ***n*** est le ***nombre de termes***, et u_1 le *premier terme.*

Somme infinie des termes d'une suite géométrique convergente :

Une suite géométrique est convergente ***si et seulement si*** **(*ssi*)** $|\, q\,| < 1$.

Dans ce cas, q^n devient de plus en plus petit lorsque ***n*** augmente : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

On déduit, en poussant la formule à sa limite $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}$, que la **somme infinie des termes est** $S = \dfrac{u_1}{1-q}$.

Ainsi : $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \ldots$ infiniment $\ldots = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = +2$.

Le résultat est *fini* malgré une somme infinie.