Suites numériques - Forme *fonctionnelle* ou *récurrente*.

On appelle *suite numérique* toute fonction $u : n \in \mathbb{N} \to u(n) \in \mathbb{R}$.

Autrement dit : Toute fonction f peut devenir *suite* , il suffit que son domaine de définition soit $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels.

Ainsi : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ devient $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $u(n) = \dfrac{2n-3}{n+1}$.

L'usage veut que l'image $u(n)$ soit notée u_n. (u indice n) : $u_0 = -3$, $u_1 = -\dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{3}$, $u_3 = \dfrac{3}{4}$ ......

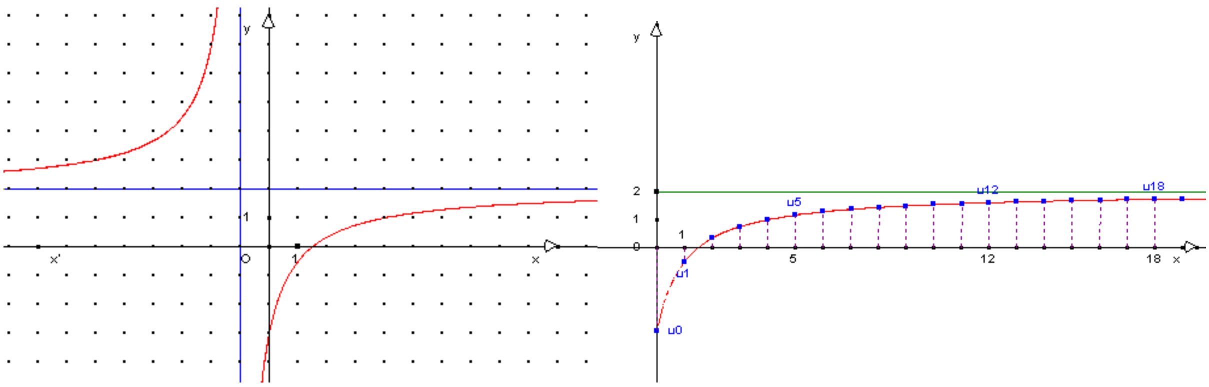
Une *suite* est sous <u>*forme fonctionnelle*</u> si la formule proposée pour u_n est directement transposable en écriture « fonction », donc permet le *calcul immédiat de u_n pour toute valeur de n*.

$u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ est une forme fonctionnelle : $u_{23} = \dfrac{43}{24}$.

<u>Graphe d'une suite - forme fonctionnelle :</u>

A l'identique des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une suite numérique possède une représentation graphique, constituée des seuls points d'abscisses entières $x = n$.

Exemple : Graphe de $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$. On l'extrait de celui de $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$.



Une *suite* est sous <u>*forme récurrente*</u> si la formule proposée pour u_n n'est pas directement transposable en écriture « fonction », et ne permet le *calcul de u_n que de proche en proche*, à partir des ordres précédents.

$u_n = 2u_{n-1} + 1$ est une forme récurrente. Chaque terme est le double de celui qui le précède, augmenté de 1.

Si $u_0 = -3$, on déduit $u_1 = 2u_0 + 1 = -5$, $u_2 = 2u_1 + 1 = -9$, $u_3 = 2u_2 + 1 = -17$ .....

Pour amorcer une suite récurrente, il faut en connaître un ou plusieurs termes.

La majorité des problèmes de *suites*, consiste à retrouver l'écriture *fonctionnelle*, à partir de l'écriture *récurrente*.

Une suite sous forme récurrente n'étant qu'une autre présentation d'une suite fonctionnelle, elle admet également un graphe, mais il faut calculer, de proche en proche, chaque *ordonnée* u_n pour chaque *abscisse* n.

Suite monotone :

Une suite numérique est dite *monotone* (croissante ou décroissante) si la progression de ses termes successifs l'est, c'est à dire ne s'inverse jamais.

***u* croissante** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in N.}$

***u* décroissante** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \forall n \in N.}$

Soit $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$, vérifions que u est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-3}{(n+1)+1} - \frac{2n-3}{n+1} = \frac{2n-1}{n+2} - \frac{2n-3}{n+1} = \frac{(2n-1)(n+1)-(2n-3)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{5}{(n+1)(n+2)}.$$

Le résultat est positif pour tout entier positif n. D'où $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}}$ $\Leftrightarrow$ ***u* croissante.**

Le graphe de la suite vérifie ce résultat, on constate bien que les valeurs u_n croissent avec n, et on les voit se bloquer sur la hauteur $y = 2$ de l'asymptote horizontale, ce dont on parlera plus bas.

Suite majorée ou minorée :

Une suite est dite *majorée* (ou *minorée*) si et seulement si tous ses termes u_n restent *inférieurs* (ou *supérieurs*) à une quantité A appelée *Majorant* (ou *minorant*) de la suite.

u majorée par A $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u_n \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$

u minorée par B $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u_n \geq B \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$

Vérifions, pour la suite précédente, qu'elle est majorée par 2, comme l'exprime son graphe.

Pour des commodités de calcul, plutôt que de montrer $u_n \leq 2$, on compare à 0, soit $u_n - 2 \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$u_n - 2 = \dfrac{2n-3}{n+1} - 2 = \dfrac{(2n-3)-2(n+1)}{n+1} = -\dfrac{5}{n+1} \leq 0$ pour tout entier naturel n.

La suite est majorée par 2 . *Toute valeur supérieure à 2 est également majorant de la suite, mais son graphe semble indiquer que 2 est le plus petit de ces majorants.*

Convergence - Divergence d'une suite numérique :

Si, lorsque l'ordre n s'accroît jusqu'à devenir infini, les termes u_n de la suite se concentrent sur une valeur L jusqu'à se confondre avec elle, la suite est dite *convergente vers* L, ce que l'on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

(qui est lu : limite de u_n égale L).

Pour $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$, en utilisant le rapport des plus hauts degrés, on vérifie bien $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Si les termes u_n tendent au contraire vers l'infini lorsque $n \to +\infty$, la suite est dite *divergente*.

Cas particuliers de suites numériques :

A/ Les suites arithmétiques

Une suite numérique u est dite *arithmétique* si et seulement si chacun de ses termes est égal au précédent *augmenté* d'une valeur constante r appelée *raison* de la suite.

$$u \text{ arithmétique} \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + r \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r = C^{te}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi (-7,-3,+1,+3,+7,+11 .....) forment une suite arithmétique de raison $r = +4$.

Exemple : Soit u telle que $u_n = 1 + 2n$ (forme *fonctionnelle*) . Montrons que u est arithmétique.
$u_{n+1} - u_n = [1 + 2(n+1)] - (1 + 2n) = +2$. La suite u est arithmétique, de raison $r = +2$.

Relation entre deux termes d'une suite arithmétique : $u_n = u_p + (n - p).r$

Ainsi $u_7 = u_6 + r$, $u_{12} = u_5 + 7r$, $u_8 = u_{21} - 13r$. (Il suffit d'ajuster le nombre de raisons entre n et p)

Présentation récurrente *d'une suite arithmétique*

Il faut connaître *un terme* , pour amorcer la récurrence, et sa *raison* , pour passer d'un terme au suivant :

Exemple : $\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$, suite arithmétique de raison $r = +5$.

Présentation fonctionnelle *d'une suite arithmétique*

Par la relation exprimant un terme u_n en fonction d'un autre u_p , on calcule en général le terme *général* u_n de la suite, en fonction du premier terme u_1 ou u_0 de cette suite : $\boldsymbol{u_n = u_0 + n.r}$ ou $\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1).r}$

Exemple précédent : $u_n = u_1 + (n-1).r = -4 + 5(n-1)$, soit : $\boldsymbol{u_n = 5n - 9 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$ **.**

On remarquera que la présentation *fonctionnelle* d'une suite arithmétique est une fonction *affine* , et son graphe une *droite* de coefficient directeur $a = r$ (raison de la suite) : $u_n = a.n + b \Leftrightarrow y = a\,x + b$.

Le graphe d'une suite *arithmétique* est une droite, *décroissante* si $r < 0$, *croissante* si $r > 0$, *horizontale ,* donc *constante* , si $r = 0$.

Conséquence* : Une suite arithmétique non constante ($r \neq 0$) est *toujours divergente.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \text{ si } r < 0 \text{ (\textit{droite décroissante})} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ si } r > 0 \text{ (\textit{droite croissante})} \end{cases}$$

Suite arithmétique de 3 termes : (a , b , c) *suite arithmétique* $\Leftrightarrow 2\,b = a + c$

$b = a + r$ et $b = c - r$ entraînent bien $2\,b = a + c$. La valeur b est le milieu de $[a , c]$.

Somme des termes d'une suite arithmétique finie :

On démontre par récurrence :

u suite *arithmétique* $\Rightarrow$ $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n = \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n)$.

La formule est *dangereuse* :

Se souvenir que n est le *nombre de termes* , $(u_1 + u_n)$ la *somme des* 2 *termes extrêmes.*

Ainsi : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = \dfrac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$, car il y a $(n + 1)$ termes.

Ecrire « S_n » peut signifier tout autant « n est le nombre de termes » que « le dernier terme est u_n ».

Exemple : Nous savons que $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots.. + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ **,** ce que confirme la formule précédente, puisqu'on a affaire à une suite arithmétique de n termes, de 1er terme $u_1 = 1$ et dernier terme $u_n = n$.

La raison est $r = +1$.

B/ Les suites géométriques

Une suite numérique u est dite *géométrique* si et seulement si chacun de ses termes est égal au précédent *multiplié* par une valeur constante $q \neq 0$, appelée *raison* de la suite.
$\boldsymbol{u}$ ***géométrique*** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n \,.\, q}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q = \mathrm{C}^{te}}$ **,** $\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}}$ **.**

Ainsi $(-16 , +4 , -1 , +\frac{1}{4} , -\frac{1}{16} , +\frac{1}{64} \ldots..)$ forment une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$.

Exemple : Soit u telle que $u_n = 3.(2^n)$ (forme *fonctionnelle*). Montrons que u est géométrique.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3.(2^{n+1})}{3.(2^n)} = +2$. La suite u est géométrique, de raison $q = +2$.

Relation entre deux termes d'une suite géométrique : $\boldsymbol{u_n = u_p \,.\, q^{(n-p)}}$

Ainsi $u_4 = u_3 \,.\, q$, $u_9 = u_5 \,.\, q^4$, $u_6 = u_8 \,.q^{-2} = \dfrac{u_8}{q^2}$. (Il suffit d'ajuster, dans la puissance, le nombre de raisons entre n et p).

<u>*Présentation* récurrente *d'une suite géométrique*</u>

Il faut connaître *un terme* , pour amorcer la récurrence, et la *raison* , pour passer d'un terme au suivant :

Exemple : $\begin{cases} u_0 = +3 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\, u_n \end{cases}$, suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.

<u>*Présentation* fonctionnelle *d'une suite géométrique*</u>

Par la relation exprimant un terme u_n en fonction d'un autre u_p , on calcule en général le terme *général* u_n de la suite, en fonction du premier terme u_1 ou u_0 de cette suite. $\boldsymbol{u_n = u_0.q^n}$ ou $\boldsymbol{u_n = u_1.q^{n-1}}$.

Exemple précédent : $u_n = 3.(-\frac{1}{2})^n$ $\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}}$ **.** *Attention* : « -1 » doit rester dans la puissance.

Convergence ou Divergence d'une suite géométrique :

$$\text{Si } |q| < 1 \text{, la suite } \textit{géométrique} \text{ est } \textit{convergente} \text{ vers } 0 : \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

$$\text{Si } |q| > 1 \text{, la suite } \textit{géométrique} \text{ est } \textit{divergente} : \lim_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$$

En effet : Multiplier par -0,5 revient à diviser par -2, et multiplier par +0,33 à diviser par +3 .

Donc *multiplier* par q tel que $|q| < 1$ équivaut à *diviser* , ce qui justifie qu'en définitive $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exemple : $\left(-16 , +4 , -1 , +\frac{1}{4} , -\frac{1}{16} , +\frac{1}{64} \ldots\ldots\right) \to 0$, avec $q = -\frac{1}{4} = -0{,}25$.

A l'inverse : Multiplier par -3 ou par +2, soit par q tel que $|q| > 1$, rend les termes de la suite de plus en plus grands en valeur absolue, soit $\lim_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$.

Exemple : $\left(-\frac{1}{4} , -\frac{1}{2} , -1 , -2 , -4 , -8 \ldots\ldots\right) \to -\infty$, avec $q = +2$.

Suite géométrique de 3 termes : (a, b, c) sont en suite *géométrique* $\Leftrightarrow b^2 = a \,.\, c$

$b = a \,.\, q$ et $b = c \,/\, q$ entraînent bien $b.\, b = (a \,.\, q)\left(\frac{c}{q}\right)$, soit $b^2 = a.c$.

Somme des termes d'une suite géométrique finie :

On démontre par récurrence :

$$u \text{ suite } \textit{géométrique} \Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n = u_1.\frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ , si } q \neq 1.$$

La formule est *dangereuse* :

Se souvenir que n est le *nombre de termes* , et u_1 le *premier terme.*

Somme infinie des termes d'une suite géométrique convergente :

Une suite géométrique est convergente *si et seulement si* (*ssi*) $|q| < 1$.

Dans ce cas, q^n devient de plus en plus petit lorsque n augmente : $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$.

On déduit, en poussant la formule à sa limite $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n = u_1.\frac{1 - q^n}{1 - q}$, que la somme infinie des termes est $S = \frac{u_1}{1 - q}$.

Ainsi : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ infiniment $\ldots = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = +2$.

Le résultat est *fini* malgré une somme infinie.