Le raisonnement par récurrence est un raisonnement *inductif*, qui apporte une preuve là ou le raisonnement *déductif* classique atteint ses limites.

Exemple : **Montrer que *la somme des n premiers entiers non nuls* est :** $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration classique et sa critique :

On écrit S_n de deux façons, à l'envers et à l'endroit, que l'on additionne.

$$\begin{array}{r} S_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n \\ S_n = n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2\,S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1) + (n+1) \end{array}$$

On remarque, en additionnant en colonne, qu'en avançant d'un terme sur la première ligne, on ajoute une unité qui est au contraire soustraite en avançant d'un terme sur la seconde ligne.

Donc dans l'addition, chaque colonne a une somme constante $(n+1)$.

Il suffit alors de constater que la somme $2S_n$ comporte n résultats égaux à $(n+1)$: $2S_n = n\,(n+1)$, soit $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

La démonstration est valable, sauf qu'un esprit malin pourrait faire remarquer que le point faible de celle-ci ce sont …
« les petits points **......** ».

En effet : *On a supposé que les sommes en colonne restaient bien égales à* $(n+1)$ *même là où sont les petits points, or ce n'est pas prouvé.*

Le raisonnement par récurrence va lever cette incertitude.

Principe du Raisonnement par récurrence

Soit une proposition P_n , ***affirmation*** dépendant de $n \in \mathbb{N}$, qu'il s'agit de prouver être vraie pour tout n.

1/ On prouve P_n vraie à son premier ordre (généralement 0 ou 1) : **On prouve P_1 vraie** **(*Initialistion*)**

2/ On prouve que **<u>si</u>** P_n **est vraie, <u>alors</u>** P_{n+1} **est également vraie** (cœur de la démonstration) **(*Hérédité ou Héritage*)**

3/ On conclue que P_n **est vraie , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$** **(*Conclusion*)**

Le raisonnement par récurrence peut se comparer à une « <u>réaction en chaîne</u> ».

Au 2/, on **prouve** que chaque proposition P_{n+1} n'a besoin, pour être vérifiée, que de voir la proposition P_n , celle qui la précède, elle-même vérifiée.

On ne prouve nullement que P_n ou P_{n+1} sont vraies, mais <u>seulement que</u> « *pour que l'affirmation suivante* P_{n+1} *soit vraie, il suffit que la précédente* P_n *le soit* ».

Pour que la « réaction en chaîne » se propage, il suffit de l'amorcer, ce que nous faisons en *vérifiant* P_1 vraie à l'étape 1/.

Le 2/ ayant été prouvé : P_1 *vraie* $\Rightarrow P_2$ *vraie* $\Rightarrow P_3$ *vraie* $\Rightarrow$ .... toutes les P_n sont vraies, ce que rappelle la conclusion 3/.

Exemple : **Montrer que *la somme des* n *premiers entiers non nuls* est** $\mathbf{S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$ **.**

Faisons le choix d'une *proposition* P_n : **Soit** $\mathbf{P_n}$ **:** $\mathbf{1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$ **.**

Important : Ne pas confondre P_n qui est une *affirmation* , à laquelle on ne peut répondre que par « vrai » ou « faux », avec S_n qui est le *nom d'une expression* , ici $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$.

On ne peut pas dire S_n *« vraie » ou « fausse »* , mais seulement en faire le calcul : $S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

1/ Initialisation : Vérifions P_1 « vraie ».

P_1 affirme : la somme S_1 du seul et unique premier entier 1 est 1, ce qui est vrai.

2/ Hérédité : Supposons P_n « vraie ». Démontrons qu'alors P_{n+1} est aussitôt « vraie ».

P_{n+1} dit : La somme des $(n + 1)$ premiers entiers est $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$,

formule obtenue en transposant celle de S_n au rang suivant $(n + 1)$, soit en remplaçant n par $(n + 1)$.

Comme on a supposé que la formule de S_n *est vraie, on peut remplacer* $1 + 2 + 3 + ... + n$ *par* $\dfrac{n(n+1)}{2}$:

$$S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

On a bien démontré que P_n *« vraie »* $\Rightarrow$ P_{n+1} *« vraie »* .

La réaction en chaîne, amorcée par P_1 peut se transmettre à tous les ordres *n.*

3/ Conclusion : On peut conclure : P_n est bien *« vraie »* pour tout ordre n entier.

Ainsi : $S_{37} = 1 + 2 + 3 + ... + 36 + 37 = \dfrac{37 \times 38}{2} = 703$.