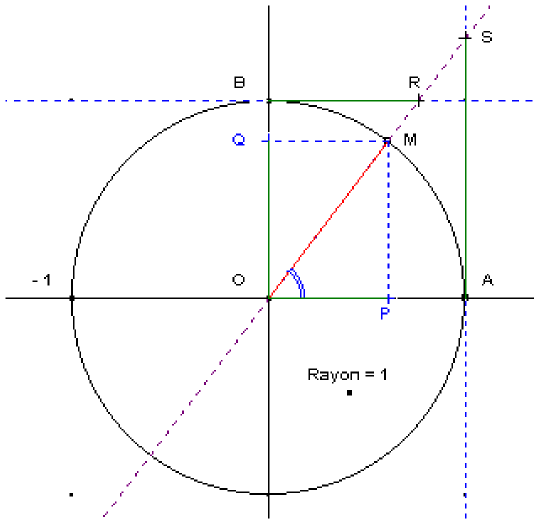
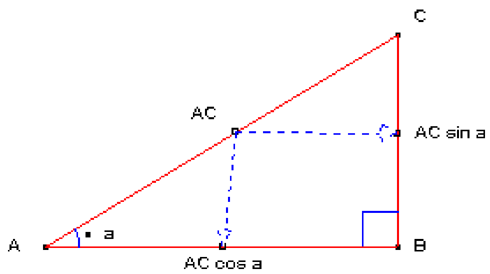
On appelle *cercle Trigonométrique* , un cercle de rayon $R = 1$, orienté positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Lignes trigonométriques d'un angle :

$\cos\alpha = \overline{OP}$; $\sin\alpha = \overline{OQ}$; $\tan\alpha = \overline{AS}$; $\text{cotan}\,\alpha = \overline{BR}$



Lignes trigonométriques dans un triangle rectangle quelconque :



$\cos\alpha = \dfrac{AB}{AC}$; $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AC}$; $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{BC}{AB}$; $\text{cotan}\,\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

Projection sur l'horizontale	:	$AB = AC\,.\cos\alpha$	On multiplie par le *cosinus*
Projection sur la verticale	:	$BC = AC\,.\sin\alpha$	On multiplie par le *sinus*
Relèvement - horizontale sur verticale	:	$BC = AB\,.\tan\alpha$	

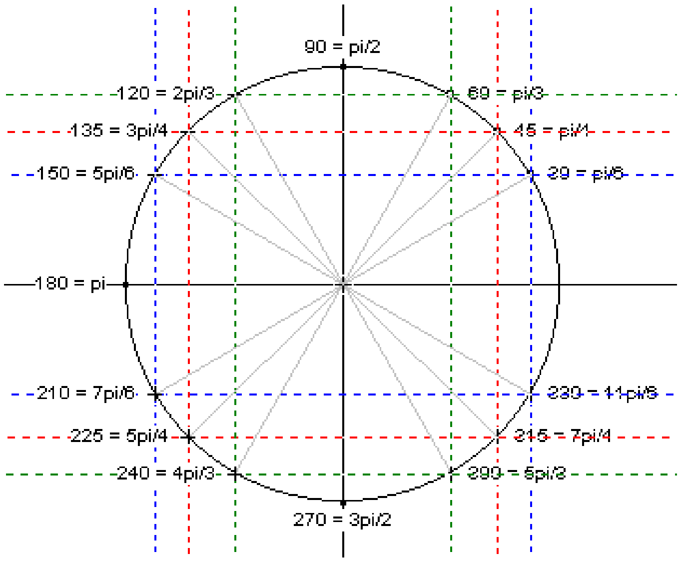
Relations fondamentales :

$-1 \le \cos\alpha \le +1$ et $-1 \le \sin\alpha \le +1$ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ pour tout α réel

Lignes trigonométriques des angles usuels :

x^{deg}	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °	180 °
x^{rad}	0	$\pi / 6$	$\pi / 4$	$\pi / 3$	$\pi / 2$	π
cos x	+ 1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	- 1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	+1	0

Angles remarquables :



Equations trigonométriques :

Deux angles ont même *cosinus* si et seulement si ils sont égaux ou opposés, au nombre de tours près.

$$\cos X = \cos A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X \equiv +A\,[2\pi] \\ X \equiv -A\,[2\pi] \end{cases}$$

La notation $X \equiv A\ [2\pi]$ se lit X congru à A modulo 2π.

On dit aussi : $X = A + 2k\pi$, $\forall\, k \in Z$, où $2k\pi = k\,(2\pi) = k$ tours entiers.

Deux angles ont même *sinus* ssi ils sont égaux ou supplémentaires (somme π) , au nombre de tours près.

$$\sin X = \sin A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X \equiv \quad +A\,[2\pi] \\ X \equiv \pi - A\,[2\pi] \end{cases}$$

Deux angles ont même *tangente* si et seulement si ils sont égaux, au nombre de *demi-tours* près.

$$\tan X = \tan A \quad \Leftrightarrow X \equiv A\ [\pi]$$

Angles associés :

Angles opposés	$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = \sin x$
Angles supplémentaires (somme = 180 °)	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
Angles différant de π (différence = 180 °)	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
Angles complémentaires (somme 90 °)	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

<u>Exercice 3</u> - *Exemple* : Résoudre $\sin 3x = \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$

On sait $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. L'équation devient $\sin 3x = \sin\frac{\pi}{6}$, d'où $\begin{cases} 3x \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \\ 3x \equiv \pi - \frac{\pi}{6}\,[2\pi] = 3x \equiv \frac{5\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases}$

L'expression $[2\pi]$ signifiant que les angles $3x$ solutions diffèrent entre eux de tours entiers, les solutions x qui en sont les tiers diffèrent pour leur part de *tiers de tours* , donc de $\pi/3$.

$\begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{18}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \\ x \equiv \frac{5\pi}{18}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$ Il faut ensuite sélectionner les angles x calculés, par sauts de $\pm\frac{2\pi}{3}$, à partir de $\frac{\pi}{18}$ et $\frac{5\pi}{18}$.

$$-\frac{23\pi}{18}\,;\,-\frac{11\pi}{18}\,;\,\overbrace{+\boldsymbol{\frac{\pi}{18}}\,;\,+\boldsymbol{\frac{13\pi}{18}}\,;\,+\boldsymbol{\frac{25\pi}{18}}}\,;\,+\frac{37\pi}{18}\,;\,+\frac{49\pi}{18}\,;\,+\frac{61\pi}{18}$$

$$-\frac{19\pi}{18}\,;\,-\frac{7\pi}{18}\,;\,\overbrace{+\boldsymbol{\frac{5\pi}{18}}\,;\,+\boldsymbol{\frac{17\pi}{18}}\,;\,+\boldsymbol{\frac{29\pi}{18}}}\,;\,+\frac{41\pi}{18}\,;\,+\frac{53\pi}{18}\,;\,+\frac{65\pi}{18}$$

Face à une équation de type $\cos X = \sin A$, revenir à $\cos X = \cos B$ à l'aide des formules d'angles associés.

Lignes trigonométriques de (*a* + *b*) et (*a* – *b*)

$$\cos(a + b) = \cos a \,.\, \cos b - \sin a \,.\, \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \,.\, \cos b + \sin b \,.\, \cos a$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \,.\, \tan b}$$

$$\cos(a - b) = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \,.\, \cos b - \sin b \,.\, \cos a$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \,.\, \tan b}$$

Formules de l'angle double :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \,.\, \cos x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Les deux dernières expressions de $\cos 2x$ sont couramment utilisées pour linéariser, conjointement avec les formules ci-dessous.

Transformation de produits en sommes - Linéarisation :

« Linéariser » consiste à éliminer tout *produit* ou *puissance* d'une expression trigonométrique :

Ainsi $f(x) = \cos^3 x \,.\, \sin 2x$ n'est pas linéarisé, alors que $g(x) = 3\sin 3x - 2\cos 5x$ l'est.

Formules utilisées

$$\cos a \,.\, \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b) \right)$$

$$\sin a \,.\, \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b) \right)$$

$$\sin a \,.\, \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b) \right)$$

Exemple : Linéariser $f(x) = \sin^2 x \,.\, \cos x$

On sait que $\sin 2x = 2\sin x \,.\, \cos x$, donc que $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x)(2\sin x \,.\, \cos x) = \frac{1}{2}\sin x \,.\, \sin 2x$

or $\sin a \,.\, \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b) \right)$, d'où $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\cos 3x - \cos(-x)) \right)$

et comme $\cos(-x) = \cos x$, on déduit $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{4}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos x}$.

Formules de transformation de sommes trigonométriques en produits

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2} \,.\, \cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2} \,.\, \sin\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2} \,.\, \cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2} \,.\, \cos\frac{A+B}{2}$$

Exemple : **Transformer en produit** $\boldsymbol{f(x) = \cos x + 2\cos 2x + \cos 3x}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2} \,.\, \cos\frac{A-B}{2}$ entraîne $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \,.\, \cos(-x) = 2\cos 2x \,.\, \cos x$,

sachant que $\cos(-x) = \cos x$.

Donc : $f(x) = 2(\cos 2x + \cos 2x \,.\, \cos x) = 2\cos 2x \,.\, (1 + \cos x)$

De plus $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ entraîne $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$, soit $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, d'où $\boldsymbol{f(x) = 4\cos 2x \,.\, \cos^2\frac{x}{2}}$.