Déterminant et Produit Scalaire - Equations de droites du plan

Deux vecteurs sont *colinéaires* si et seulement si leur *déterminant* est *nul*.

$\overrightarrow{u}(a\,;b)$ et $\overrightarrow{v}(a'\,;b')$ colinéaires $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec k réel ,

$\begin{cases} a' = ka \\ b' = kb \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = k \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$,

$det\,(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.

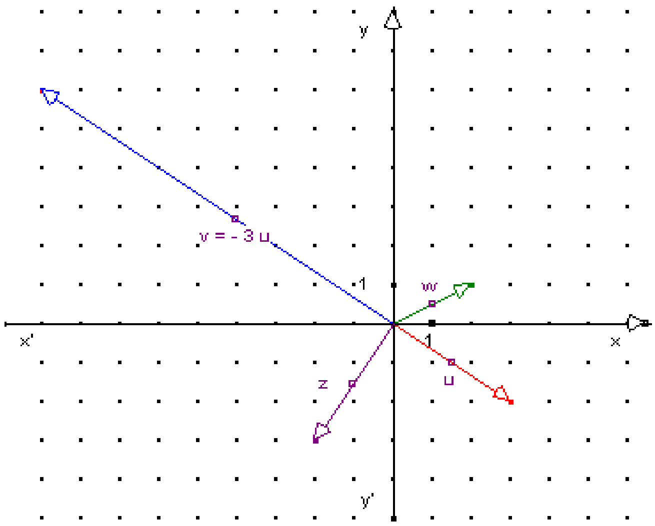
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix} = -9\,\overrightarrow{i} + 6\,\overrightarrow{j}$ vérifient $\overrightarrow{v} = -3\,\overrightarrow{u}$ et sont *colinéaires* , donc de même direction.

Leur déterminant est nul : $det\,(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} +3 & -9 \\ -2 & +6 \end{vmatrix} = ab' - ba' = (+3)(+6) - (-9)(-2) = 0$.

$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{z}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -2\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j}$ ne sont pas multiples.

Ils sont libres et forment une base du plan.

Leur déterminant est non nul : $det\,(\overrightarrow{w}\,;\overrightarrow{z}) = \begin{vmatrix} +2 & -2 \\ +1 & -3 \end{vmatrix} = ab' - ba' = (+2)(-3) - (-2)(+1) = -4$.



Deux vecteurs sont *orthogonaux* si et seulement si leur *produit scalaire* est *nul*.

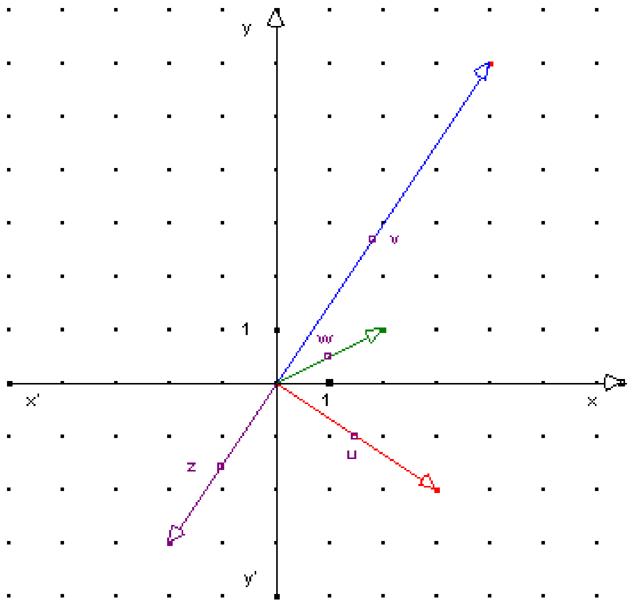
$\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 4\,\overrightarrow{i} + 6\,\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux.

Leur produit scalaire est nul : $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = aa' + bb' = (+3)(+4) + (-2)(+6) = 0$.

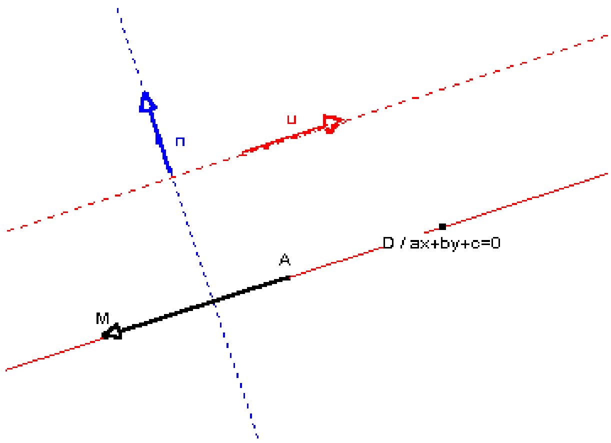
$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{z}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix} = -2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ ne le sont pas.

Leur déterminant est non nul : $\overrightarrow{w} \,.\, \overrightarrow{z} = aa' + bb' = (+2)(-2) + (+1)(-3) = -7$.



Equations Paramétriques et Cartésiennes de Droites :

Tant pour l'équation cartésienne que paramétrique, il faut exprimer le fait que M, situé sur (D), doit vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.



Equation Cartésienne **: Forme** $\boldsymbol{D : a\,x + b\,y + c = 0}$

$$M(x\,;\,y) \in (D) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{u}) \text{ colinéaires} \Leftrightarrow det\,(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_M - x_A & a \\ y_M - y_A & b \end{vmatrix} = 0\,.$$

ou encore $\dfrac{x_M - x_A}{a} = \dfrac{y_M - y_A}{b}$.

Exemple : Soit la droite (D) passant par les points $A\,(2\,;-1)$ et $B\,(1\,;3)$:

$$M(x\,;y) \in (D) \Leftrightarrow det\,(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_M - x_A & x_B - x_A \\ y_M - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ y+1 & +4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(x-2) + (y+1) = 0\,.$$

L'équation cartésienne de (D) est : $D:\ 4x + y - 7 = 0$, équation vérifiée par tous les points $M\,(x\,;y)$ de la droite (D).

Une *équation cartésienne* de droite est une *connaissance globale* de cette droite, par une équation que vérifient chacun de ses points.

Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes, multiples les unes des autres :

$D: a\,x + b\,y + c = 0$ et $D: a'\,x + b'\,y + c' = 0$ représentent la même droite (D) ssi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Ainsi, $D:\ 2x - 3y + 4 = 0$ et $D':\ -6x + 9y - 12 = 0$ sont une seule et même droite affine du plan.

***Equation Paramétrique* : Forme $D\ \begin{cases} x = a + ka' \\ y = b + kb' \end{cases}$, pour tout k réel.**

$M(x\,;y) \in (D) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{u})$ colinéaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = ka' \\ y - y_A = kb' \end{cases}$.

Exemple : Recherche d'une équation paramétrique de la droite (D) précédente.

$$M(x\,;y) \in (D) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{AB}) \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -k \\ y + 1 = 4k \end{cases},\ \forall k \in \mathbb{R}\,.$$

d'où une équation paramétrique de (D) : $D\ \begin{cases} x = 2 - k \\ y = -1 + 4k \end{cases}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Remarque : Il est plus judicieux de parler *d'une équation paramétrique* que de *l'équation paramétrique* , puisque celle-ci change en choisissant un autre point B sur la droite, ou en utilisant un autre vecteur directeur, multiple du premier.

Une *équation paramétrique* de droite est une *connaissance « point par point »* de cette droite. En changeant la valeur du paramètre λ , on change le point correspondant de celle-ci.

Vecteur Directeur et Vecteur Normal :

La droite $D: a\,x + b\,y + c = 0$ admet pour **vecteur directeur** $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, qui indique la direction de la droite, et pour **vecteur normal** $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, qui indique la direction perpendiculaire à la droite.

Preuve : Soit $A\,(x_A\,;y_A)$ et $M\,(x\,;y)$ deux points de la droite $D: a\,x + b\,y + c = 0$, dont ils vérifient l'équation :

$M\,(x\,;y) \in (D) \Leftrightarrow a\,x + b\,y + c = 0$,

$A\,(x_A\,;y_A) \in (D) \Leftrightarrow a\,x_A + b\,y_A + c = 0$.

Par soustraction, on obtient $a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) = 0$, que l'on peut traduire de deux façons :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow det\,(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{u}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{u}) \text{ sont } \textit{colinéaires}\ .$$

ou bien

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{n}) \text{ sont } \textit{orthogonaux}\ .$$

Ainsi, la droite D : $3x + y - 4 = 0$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$, est perpendiculaire au vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

Norme d'un vecteur :

Norme $\|\overrightarrow{u}\|$ d'un vecteur (égale à sa longueur) : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque : $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = a^2 + b^2$ (Le carré de la norme d'un vecteur est égal au produit scalaire de ce vecteur par lui-même).

Exemple : **Equation cartésienne de la médiatrice du segment [AB] , avec A (2 ; -1) et B (-1 ; + 1) .**

Distance entre deux points : $d(A\ ;\ B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Tout point de la médiatrice (D) du segment [AB] est équidistant des extrémités de ce segment.

$M\,(x\ ;\ y) \in (D) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}\|^2 = \|\overrightarrow{MB}\|^2 \Leftrightarrow (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2$,

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$,

L'équation cartésienne de (D) est : D : $6x - 4y - 3 = 0$.