

Plan d'Etude d'une Fonction Numérique :

Organisation à respecter globalement lors d'une étude de fonction

1) Domaine de définition
 Continuité - Dérivabilité - Parité

2) Limites aux bornes du domaine (*hors programme 1eS*)
 Asymptotes éventuelles

3) Intersections avec les axes de coordonnées (*facultatif*)

4) Dérivée
 Recherche des extrema
 Signe de la dérivée - Sens de variation

5) Tableau de variation (tableau résumé des travaux précédents)

6) Tracé du Graphe (Courbe Représentative)

Exemple 1 : Etude et Courbe Représentative (C) de $f : x \rightarrow f(x) = \frac{1+x}{x-2}$.

- **Domaine de définition** : $f(x)$ définie si $x \neq +2$. $D_f = \mathbb{R} - \{+2\}$.

Comme tout rapport de polynômes, f est continue et dérivable sur son domaine D_f .

- **Limites aux bornes du domaine** : (*hors programme 1eS*)

1) Aux infinis : Un rapport de polynômes se comporte aux infinis comme le rapport de ses plus hauts degrés.

d'où $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = +1$, soit une asymptote horizontale d'équation $y = +1$.

2) A l'abscisse de non définition : $x = 2$

Si $x \rightarrow 2^-$ $\begin{cases} 1+x \rightarrow 3 \\ x-2 \rightarrow 0^- \end{cases}$, d'où : $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1+x}{x-2} = -\infty$ et si $x \rightarrow 2^+$ $\begin{cases} 1+x \rightarrow 3 \\ x-2 \rightarrow 0^+ \end{cases}$, d'où : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1+x}{x-2} = +\infty$.

d'où une asymptote verticale $x = 2$.

- **Intersections avec les axes de coordonnées** : (*facultatif*)

$M(x; y) \in (C) \cap x'x \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$, d'où : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1+x=0 \Leftrightarrow x=-1 \Leftrightarrow (C) \cap x'x = \{A(-1; 0)\}$.

$M(x; y) \in (C) \cap y'y \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ x=0 \end{cases}$, d'où : $y=f(0) = \frac{1}{2}$, soit $(C) \cap y'y = \{B(0; \frac{1}{2})\}$.

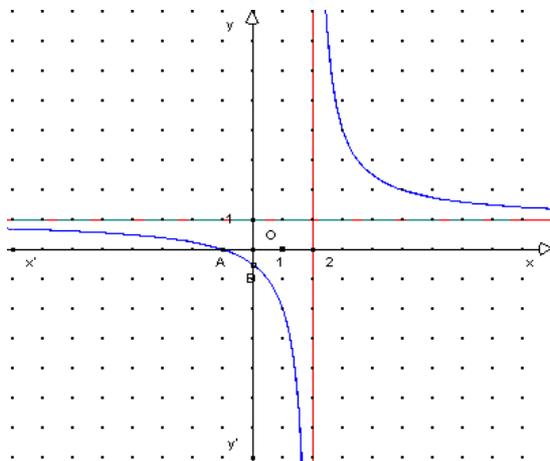
- **Dérivée** :

Forme $\frac{u}{v}$, d'où : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, soit $f'(x) = \frac{1(x-2) - 1(1+x)}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}$. Donc $f'(x) < 0, \forall x \in D_f$.

- Tableau de variation :

x	$-\infty$		$+2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	\parallel	$-$	
$f(x)$	1^-	\searrow	$-\infty \parallel +\infty$	\searrow	1^+

- Courbe Représentative :



Exemple 2 : Etude et Courbe Représentative (C) de $g : x \rightarrow g(x) = x^2 + 3x - 4$.

- Domaine de définition : $g(x)$ est définie, c'est à dire calculable pour tout x réel. $D_g = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty [$.

Comme tout polynôme, g est continue et dérivable sur son domaine D_g .

- Limites aux bornes du domaine : (hors programme 1eS)

Aux infinis : Un polynôme se comporte aux infinis comme son monôme de plus haut degré.

d'où $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 + 3x - 4) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$. Branche parabolique sur l'axe $y'y$.

- Intersections avec les axes de coordonnées : (facultatif)

$M(x; y) \in (C) \cap x'x \Leftrightarrow \begin{cases} y = g(x) \\ y = 0 \end{cases}$, d'où : $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ de racines $x = -4$ et $x = +1$.

$(C) \cap x'x = \{A(-4; 0); A'(1; 0)\}$.

$M(x; y) \in (C) \cap y'y \Leftrightarrow \begin{cases} y = g(x) \\ x = 0 \end{cases}$, d'où : $y = g(0) = -4$, soit $(C) \cap y'y = \{B(0; -4)\}$.

- Dérivée :

$$g(x) = x^2 + 3x - 4 \Leftrightarrow g'(x) = 2x + 3.$$

Recherche de l'extremum (pente nulle) : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

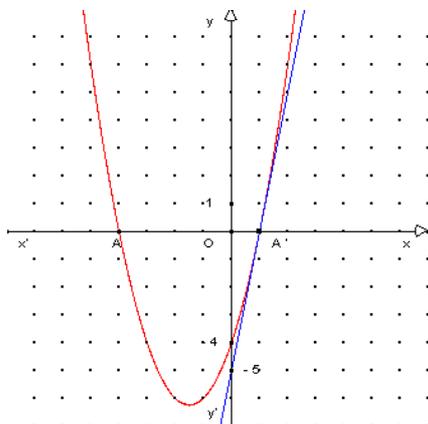
Ce sommet est point du graphe, donc vérifie : $y = g(-\frac{3}{2}) = -\frac{25}{4}$. L'extremum est $E(-\frac{3}{2}; -\frac{25}{4})$.

Signe de la dérivée : celui du binôme $2x + 3$.

- Tableau de variation :

x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	\searrow	$-25/4$	\nearrow	$+\infty$

- Courbe Représentative :



Equation de la tangente à un graphe :

Soit $A(x_A ; y_A)$ un point de la courbe représentative (C) de la fonction f , ce qui impose $y_A = f(x_A)$.

Soit $T_A : y = ax + b$ l'équation de la tangente en A à ce graphe.

La pente (coefficient directeur) d'une tangente à un graphe en l'un de ses points est donnée par la valeur du nombre dérivé en ce point.

Donc : $a = f'(x_A)$: L'équation devient : $T_A : y = f'(x_A).x + b$.

Imposons de plus à cette tangente de passer par le point $A(x_A ; f(x_A))$, ce qui impose à ses coordonnées de vérifier l'équation de

$T_A : y = f'(x_A).x + b$.

$A(x_A ; f(x_A)) \in T_A \Leftrightarrow f(x_A) = f'(x_A).x_A + b \Leftrightarrow b = f(x_A) - f'(x_A).x_A$.

d'où : $T_A : y = f'(x_A).x + f(x_A) - f'(x_A).x_A$, soit $T_A : y = f'(x_A).x + [f(x_A) - f'(x_A).x_A]$,

qui est bien de la forme $y = Ax + B$, équation d'une droite : $\begin{cases} A = f'(x_A) \\ B = f(x_A) - f'(x_A).x_A \end{cases}$.

Le résultat est généralement présenté sous la forme : $T_A : y = f'(x_A).(x - x_A) + f(x_A)$,

ou encore, en appelant a l'abscisse du point A .

Equation de la tangente à C_f en a : $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$
--

Exemple : Donner l'équation de la tangente au graphe de la fonction précédente en $x = +1$.

$g(x) = x^2 + 3x - 4 \Rightarrow g'(x) = 2x + 3$.

L'équation de la tangente à C_g en $x = a$ est $T_a : y = g'(a)(x - a) + g(a)$.

d'où $T_1 : y = g'(1)(x - 1) + g(1) \Leftrightarrow T_1 : y = 5(x - 1) + 0 \Leftrightarrow T_1 : y = 5x - 5$. (Voir graphe précédent)