Exemple : **Résoudre dans $\mathbb{R}$:** $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$.

Résoudre un système d'équations à deux inconnues, consiste à déterminer les couples (x ; y) qui vérifient chacune des équations.

Plusieurs méthodes permettent la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues :

Par « *combinaison linéaire* » , encore appelée « par addition » , Par « *substitution* » , Par « *déterminant* » .

Méthode par « *combinaison linéaire* » (Conseillée)

On décide d'une inconnue que l'on éliminera par addition, après avoir multiplié l'une ou les deux lignes par des nombres appropriés. On peut alors calculer l'autre inconnue.

$\begin{Bmatrix} 3x + y = 3 \\ 2x - 3y = 13 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3L_1 \\ L_1 \end{matrix} \begin{Bmatrix} 9x + 3y = 9 \\ 2x - 3y = 13 \end{Bmatrix}$.

Par addition : $11x = 22 \Leftrightarrow x = +2$.

Report dans : $3x + y = 3 \Rightarrow 6 + y = 3$, soit $y = -3$.

Le couple solution est : **$(x , y) = (+2 ; -3)$.**

Méthode par « *substitution* »

On choisit une équation dans laquelle l'une des inconnues se calcule aisément *en fonction de l'autre*, et on *substitue* le résultat obtenu dans l'autre équation, l'objectif restant de se retrouver avec une seule inconnue.

$\begin{Bmatrix} 3x + y = 3 \\ 2x - 3y = 13 \end{Bmatrix}$. Calculons y en fonction de x dans la première équation :

$y = 3 - 3x$ que l'on reporte dans $2x - 3y = 13$ devient $2x - 3(3 - 3x) = 13$, soit :

$2x - 9 + 9x = 13 \Leftrightarrow 11x = 22 \Leftrightarrow x = +2$.

En reportant dans $y = 3 - 3x$, on obtient $y = 3 - 3\times 2$, soit $y = -3$.

Le couple solution est : **$(x , y) = (+2 ; -3)$** .

Méthode par « *déterminant* »

Soit le système $\begin{Bmatrix} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{Bmatrix}$. On appelle *déterminant général du système*, $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$.

Les *déterminants secondaires* sont obtenus en remplaçant successivement les colonnes $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ par celle du bout $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$

. On les note alors : $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$ et $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'$.

Si $D \neq 0$, le couple solution unique $(x; y)$ vérifie : $x = \dfrac{D_x}{D}$ et $y = \dfrac{D_y}{D}$.

Ainsi $\begin{Bmatrix} 3x + y = 3 \\ 2x - 3y = 13 \end{Bmatrix} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (3)(-3) - (1)(2) = -11$.

$D \neq 0$, donc il y a un couple solution $(x ; y)$ unique.

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} = (3)(-3) - (1)(13) = -22$ et $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = (3)(13) - (3)(2) = +33$.

$x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-22}{-11} = +2$ et $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{+33}{-11} = -3$. Le couple solution est : **$(x , y) = (+2 ; -3)$** .

***Lorsque le système présente des fractions numériques** , il est souhaitable de multiplier par le P.P.M.C. des dénominateurs, afin de se débarrasser de ceux-ci avant de résoudre.*

Ainsi : $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{2} \\ x + \dfrac{2y}{3} = -2 \end{array} \right\}$ devient $\begin{array}{l} 6L_1 \\ 3L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 3 \\ 3x + 2y = -6 \end{array} \right\}$, que l'on résout par l'une des méthodes précédentes.

Certains systèmes imposent un changement de variables :

Ainsi : $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y-2} = 3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y-2} = -1 \end{array} \right\}$ impose le changement de variable suivant : $\left\{ \begin{array}{l} X = \dfrac{1}{x} \\ Y = \dfrac{1}{y-2} \end{array} \right\}$.

Il devient $\left\{ \begin{array}{l} 2X - Y = 3 \\ X + 2Y = -1 \end{array} \right\}$, qui résolu , donne $(X ; Y) = (+1 ; -1)$.

Il faut ensuite, à partir du couple $(X ; Y)$, retrouver le couple $(x ; y)$ solution.

$\left\{ \begin{array}{c} X = \dfrac{1}{x} = +1 \Leftrightarrow x = +1 \\ Y = \dfrac{1}{y-2} = -1 \Leftrightarrow y - 2 = -1 \Leftrightarrow y = +1 \end{array} \right\}$. Le couple solution est : **$(x , y) = (+1; +1)$** .

Système de 2 équations à 2 inconnues et intersection de droites affines

Chaque équation d'un système de « 2 équations à 2 inconnues » correspond à une équation de droite affine. Résoudre un système revient à chercher le point d'intersection de deux droites du plan.

Si l'on considère chaque équation du système suivant $\left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 3 \\ 2x - 3y = 13 \end{array} \right.$.

(L_1) devient $D_1 \mid y = -3x + 3$ et (L_2) devient $D_2 \mid y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{13}{3}$.

Le couple $(x ; y)$ solution du système est bien le point $M(x ; y)$ commun aux droites D_1 et D_2 .

$M(x ; y) \in D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -3x + 3 \\ y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{13}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow -3x + 3 = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{13}{3} \Leftrightarrow -9x + 9 = 2x - 13 \Leftrightarrow -11x = -22$,

soit $x = +2$.

En reportant dans l'une des équations de droites, on obtient $y = -3x + 3 = -3\times2 + 3$, soit $y = -3$.

Le point d'intersection est $A\,(+2 ; -3)$ qui correspond à la solution $(x ; y) = (+2 ; -3)$ du système.

En conséquence : 3 cas sont possibles

Les droites sont concourantes : Le couple (x ; y) solution est unique (point d'intersection unique)

Les droites sont strictement parallèles : Aucun couple (x ; y) n'est solution (pas de point d'intersection)

Les droites sont confondues : Il existe une infinité de couples (x ; y) solutions (ceux de la droite commune).