Valeurs absolues

Définition

$A \geq 0 \Leftrightarrow \mid A \mid = A$	*La valeur absolue d'un nombre positif reste égale à lui-même*
$A < 0 \Leftrightarrow \mid A \mid = -A$	*La valeur absolue d'un nombre négatif est l'opposé de ce nombre*, pour le rendre positif

Ainsi : $\mid +5 \mid = +5$ et $\mid -3 \mid = -(-3) = +3$. Prendre l'opposé d'un négatif le rend positif.

Deux nombres ont même valeur absolue si et seulement s'ils sont égaux ou opposés

$$\mid A \mid = \mid B \mid \Leftrightarrow A = B \quad \text{ou} \quad A = -B$$

Ainsi : $\mid x \mid = +3 \Leftrightarrow x = +3$ ou $x = -3$ (puisque $\mid x \mid = +3$ équivaut à $\mid x \mid = \mid +3 \mid$)

Le résultat d'une valeur absolue doit toujours être une expression positive ou nulle

(puisque la fonction « valeur absolue » a pour rôle de rendre positif)

$\mid A \mid = B$ impose $B \geq 0$ (domaine de définition à étudier)

Si $B \geq 0$ alors $\mid A \mid = B \Rightarrow A = B$ ou $A = -B$

Ainsi : $\mid x \mid = -2$ ne peut avoir de solution, puisque $\mid x \mid \geq 0$

Exemple : **Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\mid x + 3 \mid = 1 - 2x$**

Domaine de définition : Il faut $1 - 2x \geq 0$ (résultat d'une valeur absolue) , ce qui impose $x \leq +\frac{1}{2}$

<u>Aucune solution x ne pourra être retenue si elle ne satisfait pas à $x \leq +\frac{1}{2}$</u>

Nous savons que si $B \geq 0$ alors $\mid A \mid = B \Rightarrow A = B$ ou $A = -B$

Donc $\mid x + 3 \mid = 1 - 2x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3 = 1 - 2x \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \\ x + 3 = -1 + 2x \Leftrightarrow -x = -4 \Leftrightarrow x = +4 \end{array} \right\}$.

Seule $x = -\frac{2}{3}$ satisfait au domaine de définition , d'où : $S = \{ -\frac{2}{3} \}$.

En reportant les deux valeurs initialement trouvées pour x , vérifions le rôle fondamental du domaine de définition :

Pour $x = +4$, $\mid x + 3 \mid = 1 - 2x \Rightarrow \mid 4 + 3 \mid = 1 - 2\times 4 \Rightarrow \mid +7 \mid = -7$ ce qui est faux

Pour $x = -\frac{2}{3}$, $\mid x + 3 \mid = 1 - 2x \Rightarrow \mid -\frac{2}{3} + 3 \mid = 1 - 2\times\left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \mid +\frac{7}{3} \mid = +\frac{7}{3}$ valable.

Si l'équation ou l'inéquation proposée ne contient qu'un seul terme en « valeur absolue », la résolution doit se faire par la technique précédente

Si l'équation ou l'inéquation proposée contient plusieurs termes en « valeur absolue », la résolution impose d'établir un tableau de signes des termes en valeur absolue, afin de décider s'ils doivent être remplacés par eux-mêmes ou leurs opposés.

Exemple : **Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x-1|-|-2x-4| = x+3$**

On établit le tableau de signes de $x-1$ et $-2x-4$ puis on déduit les conséquences sur les valeurs absolues :

x	$-\infty$		-2		+1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-2x-4$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$\|x-1\|$		$-x+1$	|	$-x+1$	0	$x-1$	
$\|-2x-4\|$		$-2x-4$	0	$2x+4$	|	$2x+4$	

On vérifie que : lorsque les expressions sont positives, leurs valeurs absolues leur sont égales et, qu'à l'inverse, lorsqu'elles sont négatives, leurs valeurs absolues sont leurs opposées.

Il faut ensuite, zone par zone, remplacer les valeurs absolues par les expressions trouvées, puis résoudre, *en ne conservant que les solutions appartenant à la zone dans laquelle on travaille.*

Zone 1 : $x < -2$: $|x-1|-|-2x-4| = x+3$ devient $(\underline{-x+1})-(-2x-4) = x+3$

$-x+1+2x+4 = x+3 \Rightarrow 0x = -2$ qui n'admet pas de solution.

Zone 2 : $-2 \leq x < +1$: $|x-1|-|-2x-4| = x+3$ devient $(\underline{-x+1})-(\underline{2x+4}) = x+3$

$-x+1-2x-4 = x+3 \Rightarrow -4x = +6 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$. Cette racine appartient bien à la zone 2 , donc est *valable*.

Zone 3 : $x \geq +1$: $|x-1|-|-2x-4| = x+3$ devient $(x-1)-(\underline{2x+4}) = x+3$

$x-1-2x-4 = x+3 \Rightarrow -2x = +8 \Rightarrow x = -4$. Cette racine n'appartient pas à la zone 3 , donc *non valable*.

En conclusion, la réunion des trois zones donne : $S = \{-\frac{3}{2}\}$, seule racine solution de l'équation initiale.

***Inéquations comportant des valeurs absolues* :**

La démarche est identique : Si l'inéquation contient plusieurs valeurs absolues, il faut dresser un tableau, comme précédemment et résoudre l'inéquation dans chaque zone, mais :

Attention : les solutions sont des intervalles qu'il faut réunir pour obtenir la solution finale.

Par contre : Si l'inéquation ne contient qu'une valeur absolue, il est souvent plus rapide de mettre au carré :

La mise au carré conserve l'ordre des nombres positifs, donc des valeurs absolues.

$$|A| \geq |B| \Leftrightarrow A^2 \geq B^2$$

Le nombre qui a la plus grande valeur absolue a le plus grand carré : $(-5)^2 > (+3)^2$ car $|-5| > |+3|$

Exemple : **Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|\, x + 2 \,| > 3$.**

Les deux membres de l'inéquation sont positifs, donc *leur mise au carré conserve leurs ordres* :

$(x + 2)^2 > 9 \;\Leftrightarrow\; (x + 2)^2 - 9 > 0 \;\Leftrightarrow\; [(x + 2) - 3][(x + 2) + 3] > 0 \;\Leftrightarrow\; (x - 1)(x + 5) > 0$

d'où le tableau de signes de $P(x) = (x - 1)(x + 5)$

x	$-\infty$		-5		$+1$		$+\infty$
$x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x + 5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\boldsymbol{P(x)}$		$\mathbf{+}$	**0**	$\mathbf{-}$	**0**	$\mathbf{+}$	

$P(x) > 0$ impose $x < -5$ ou $x > +1$, soit $S = \,]-\infty\, ; -5\,[\;\cup\;]+1\, ; +\infty\,[$.