Equations irrationnelles

> L'équation irrationnelle $\sqrt{A} = B$ impose $\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$ (Conditions d'Existence)

Pour résoudre $\sqrt{A} = B$, on impose les conditions précédentes et on élève au carré : $A = B^2$, que l'on résout.

Exemple : **Résoudre dans $\mathbb{R}$:** $\sqrt{x^2 - 4} = x + 1$.

Conditions d'existence : $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -2] \cup [+1 ; +\infty[$,

$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Le domaine d'existence est : $D = [+1 ; +\infty[$, auquel doivent satisfaire les solutions.

Elevons au carré : $x^2 - 4 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 2x = -5$, d'où $x = -\dfrac{5}{2}$.

Cette solution ne satisfait pas aux conditions d'existence : $S = \varnothing$.

Une forme $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{C}$ impose $A \geq 0$, $B \geq 0$, $C \geq 0$.

Il faut ensuite se ramener à la forme $\sqrt{A} = \sqrt{B} + \sqrt{C}$ où chacun des deux membres est positif.

On met alors au carré.

Une seconde mise au carré sera nécessaire, à partir d'une forme $\sqrt{A} = B$, après avoir défini les nouvelles conditions d'existence.

Inéquations irrationnelles

> L'inéquation irrationnelle $\sqrt{A} \leq B$ impose $\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$, B supérieur à $\sqrt{A}$ doit être positif
>
> L'inéquation irrationnelle $B \leq \sqrt{A}$ impose seulement $A \geq 0$, B inférieur à $\sqrt{A}$, pouvant être négatif

Exemple 1 : **Résoudre dans $\mathbb{R}$:** $\sqrt{x^2 - 1} \leq x + 2$.

Conditions d'existence : Il faut simultanément imposer : $x^2 - 1 \geq 0$ et $x + 2 \geq 0$.

Nous avons vu que : $D = [-2 ; -1] \cup [+1 ; + \infty [$.

> La mise au carré conserve l'ordre des nombres positifs : $0 \leq A \leq B \Rightarrow A^2 \leq B^2$

ce qui est le cas de chaque membre de l'inéquation. Donc $\sqrt{x^2 - 1} \leq x + 2 \Rightarrow x^2 - 1 \leq (x + 2)^2$.

$x^2 - 1 \leq x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 4x \geq -5$, d'où $x \geq -\dfrac{5}{4}$.

Compte tenu du domaine de définition D , la solution est : $\boldsymbol{S = [-\frac{5}{4} ; -1] \cup [+1 ; + \infty [}$ **.**

Exemple 2 : **Résoudre dans ℝ :** $x + 2 < \sqrt{x^2 - 1}$ **.**

Cet énoncé est le contraire de celui de l'exercice précédent, on peut donc conjecturer : $S =$ **] -2 ; -** $\mathbf{\frac{5}{4}}$ **[.**

Nous ferons une démonstration complète, afin de vérifier l'importance des conditions de mise au carré dans une inéquation irrationnelle.

Conditions d'existence : Rien à imposer à $x + 2$, qui peut être négatif comme positif.

$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow D =]-\infty ; -1] \cup [+1 ; +\infty[$.

On ne peut élever au carré, car $x + 2$ peut être négatif, donc pourrait avoir un carré supérieur à $x^2 - 1$.
Séparons la résolution en deux cas, suivant le signe de $x + 2$:

<u>*Zone 1*</u> : $x < -2$, soit $x + 2 < 0$.

Nous obtenons : $x + 2 < 0 \leq \sqrt{x^2 - 1}$, inéquation toujours satisfaite.

On conclue que tout $x < -2$ est solution, ce qui donne une première zone solution : $S_1 =]-\infty ; -2[$.

<u>*Zone 2*</u> : $x \geq -2$, soit $x + 2 \geq 0$.

Nous obtenons : $0 \leq x + 2 < \sqrt{x^2 - 1}$, qu'il faut imposer, car ce n'est pas naturellement vrai.

Les deux termes sont positifs, on élève au carré en conservant l'ordre :

$(x + 2)^2 < x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 < x^2 - 1 \Leftrightarrow 4x < -5$, d'où $x < -\frac{5}{4}$.

La zone 2 impose $x \geq -2$, donc la solution de la seconde zone est : $S_2 = [-2 ; -\frac{5}{4}[$.

La solution de l'exercice est la réunion des deux zones : $\boldsymbol{S = S_1 \cup S_2 =]-\infty ; -\frac{5}{4}[}$ **.**