Opérations sur les inéquations

Tout terme en ***addition ou soustraction*** change de membre en changeant de signe mais
sans changement de sens de l'inéquation

$x + b \leq a \iff x \leq a - b$ et $x - b \leq a \iff x \leq a + b$

$x - 5 > 2 \iff x > 2 + 5 \iff x > 7$, soit $S =]+7\,;+\infty[$.

Un nombre ***positif*** en ***multiplication ou division*** change de membre, sans changement de signe, et
sans changement de sens de l'inéquation : Si $a > 0$ alors $a \times x \leq b \iff x \leq \frac{b}{a}$.

$3\,x \leq +4 \iff x \leq +\frac{4}{3}$. Pas de changement de sens de l'inéquation, car « 3 », par lequel on divise, est positif.

Tout terme ***négatif*** en *multiplication ou division* change de membre, sans changement de signe, mais
en changeant le sens de l'inéquation : Si $a < 0$ alors $a \times x \leq b \iff x \geq \frac{b}{a}$.

$x > +3 \iff -5 \times x < -5 \times 3 \iff -5\,x < -15$.
On multiplie par « - 5 » nombre négatif, donc on change le sens de l'inéquation.

Binôme du premier degré - Tableau de signe

Si $a > 0$ alors $a\,x + b > 0 \iff a\,x > -b \iff x > -\frac{b}{a}$.

Si $a < 0$ alors $a\,x + b > 0 \iff a\,x > -b \iff x < -\frac{b}{a}$.

Le trinôme du premier degré $a\,x + b$ est du signe de $\boldsymbol{a}$, après sa racine $-\frac{b}{a}$, valeur qui l'annule .

Ce que résume le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax + b$		sgn($-a$)	0	**sgn(a)**	

Exemples :

a) Tableau de signes de $3x + 2$, qui admet pour racine $x = -\frac{2}{3}$ (valeur qui l'annule)

x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
$3\,x + 2$		$-$	0	+	

Ce tableau signifie que si l'on choisit $x < -\frac{2}{3}$, le résultat sera négatif, et positif pour les $x > -\frac{2}{3}$.

<u>On retient : $a = +3$ ***positif*** $\Leftrightarrow$ $3x + 2$ ***positif après la racine*** (signe de a après la racine)</u>

b) Tableau de signes de $-2x + 4$, qui admet pour racine $x = +2$ (valeur qui l'annule)

x	$-\infty$		$+2$		$+\infty$
$-2x+4$		+	0	–	

Le tableau signifie que si l'on choisit $x < +2$, le résultat sera positif, et négatif pour les $x > +2$

<u>On retient : $a = -2$ ***négatif*** $\Leftrightarrow$ $-2x + 4$ ***négatif après la racine*** (signe de a après la racine)</u>

D'une façon générale, il faut ramener les inéquations proposées à des produits ou des rapports dont on dresse le tableau de signes à l'aide de la règle des signes (valable en multiplication comme en division)

<u>Exemple</u> : Résoudre $(2x - 3)(-x + 4) > 0$

Les racines des facteurs de ce produit sont : $+\frac{3}{2}$ et $+4$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$+3/2$		$+4$		$+\infty$
$2x - 3$		–	0	+	|	+	
$-x + 4$		+	|	+	0	–	
$(2x-3)(-x+4)$		**–**	**0**	**+**	**0**	**–**	

Sur la dernière ligne : Le produit est positif, comme demandé, si $+\frac{3}{2} < x < +4$. Donc : $S =]+\frac{3}{2} ; +4[$.

<u>Exemple</u> : Résoudre $\frac{x+2}{-2x+5} \leq 0$.

Les racines des facteurs de ce rapport sont : -2 et $+\frac{5}{2}$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$+5/2$		$+\infty$
$x + 2$		–	0	+	|	+	
$-2x + 5$		+	|	+	0	–	
$\frac{x+2}{-2x+5}$		**–**	**0**	**+**	||	**–**	

On constate sur la dernière ligne que le produit est négatif ou nul, comme demandé, si $x \leq -2$ ou si $x > +\frac{5}{2}$.

Les deux barres (||) de la ligne du résultat expriment le fait que $x = +\frac{5}{2}$, qui annule le dénominateur est une valeur interdite : $S =]-\infty ; -2[\cup]+\frac{5}{2} ; +\infty[$.

Un tableau de signes, s'il contient plus d'un monôme $a\,x + b$, n'a de sens que pour des expressions en produit ou en rapport.

Le second membre de l'inéquation doit obligatoirement être nul (un tableau de signes compare avec 0)..