

Règles Opératoires sur les Fractions

Règle des signes :

La règle des signes valable pour les produits (multiplications) l'est aussi pour les rapports (divisions)

Ainsi : $\frac{+3}{+5} = +\frac{3}{5} = +0,6$ et $\frac{+5}{-4} = -\frac{5}{4} = -1,25$.

Simplification de fractions :

Tout facteur commun (multiple) situé au numérateur et au dénominateur d'une fraction peut être simplifié,

ce qui donne une fraction réduite équivalente (de valeur égale) : $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$.

Ainsi : $+\frac{12}{20} = +\frac{3 \times 4}{5 \times 4} = +\frac{3}{5} = +0,6$.

De même : $\frac{6a^2b^3c}{2ab^4c^2} = \frac{3a(2ab^3c)}{bc(2ab^3c)} = \frac{3a}{bc} = \frac{3 \times a}{b \times c}$.

Tout résultat doit être présenté sous la forme la plus simplifiée possible

Somme et différence :

Pour additionner ou soustraire deux fractions, on les met au même dénominateur, puis on ajoute ou soustrait les numérateurs

en conservant le dénominateur commun : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{b \times c}{b \times d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$.

Ainsi : $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} + \frac{5 \times 2}{5 \times 3} = \frac{12}{15} + \frac{10}{15} = \frac{12+10}{15} = \frac{22}{15}$ et $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} - \frac{3 \times 1}{3 \times 4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$.

Le dénominateur commun à un ensemble de fractions est le P.P.M.C. (plus petit commun multiple) de leurs dénominateurs, soit le plus petit nombre qui soit multiple de chacun d'entre eux

Ainsi, pour calculer $\frac{3}{8} - \frac{7}{12}$, on pourrait prendre $8 \times 12 = 96$ pour dénominateur commun, mais on obtient le même résultat

avec des chiffres moins grands, par le P.P.C.M. :

- En multipliant les dénominateurs : $\frac{3}{8} - \frac{7}{12} = \frac{3 \times 12}{8 \times 12} - \frac{7 \times 8}{12 \times 8} = \frac{36}{96} - \frac{56}{96} = \frac{20}{96} = -\frac{4 \times 5}{4 \times 24} = -\frac{5}{24}$.

- Par le PPCM : PPCM (8, 12) = 24 puisque $24 = 3 \times 8 = 12 \times 2$, ce qui permet d'écrire :

$\frac{3}{8} - \frac{7}{12} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} - \frac{2 \times 7}{2 \times 12} = \frac{9}{24} - \frac{14}{24} = -\frac{5}{24}$, méthode plus rapide et plus élégante.

Produit de Fractions :

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

$$\text{Ainsi : } \left(+\frac{8}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{8 \times 3}{5 \times 7} = -\frac{24}{35}.$$

$$\text{Il faut simplifier lorsque c'est possible : } \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{9}{10}\right) = +\frac{4 \times 9}{3 \times 10} = +\frac{2 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 3}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 5} = +\frac{2 \times 3}{5} = +\frac{6}{5}.$$

$$\text{De même : } \frac{5ac^3}{b^2} \times \frac{b^2}{10a^3c^2} = \frac{5ab^2c^3}{10a^3b^2c^2} = \frac{(\cancel{5}ab^2c^2) \times c}{(\cancel{5}ab^2c^2) \times (2a^2)} = \frac{c}{2a^2}.$$

Cas particulier : Produit d'une fraction par un nombre entier

Pour multiplier une fraction par un nombre entier, soit on multiplie le numérateur par ce nombre, soit on divise le dénominateur lorsque c'est possible

$$\text{Ainsi : } 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}. \text{ On a } \underline{\text{multiplié le numérateur}} \text{ par 3 (Preuve : } 3 \times \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{1 \times 5} = \frac{6}{5}\text{)}.$$

Lorsque c'est possible, il est préférable de diviser le dénominateur :

$$\text{Ainsi : } 2 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{4}. \text{ On a } \underline{\text{divisé le dénominateur}} \text{ par 2 (Preuve : } 2 \times \frac{3}{8} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{8} = \frac{2 \times 3}{1 \times 8} = \frac{2 \times 3}{1 \times 2 \times 4} = \frac{3}{4}\text{)}.$$

Division de Fractions :

Pour diviser deux fractions, on multiplie la fraction du numérateur par celle du dénominateur renversée

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}} = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{4}{5}\right) = -\frac{2 \times 4}{3 \times 5} = -\frac{8}{15}.$$

Classement de fractions :

Pour classer des fractions, on les met au même dénominateur, avant de les classer suivant l'ordre des numérateurs.

Calcul de pourcentages :

Prendre les 12% d'une quantité x , c'est calculer $\frac{12 \times x}{100} = 0,12 \times x$

Ajouter 25% à une quantité x , c'est calculer $x + \frac{25 \times x}{100} = \frac{100x}{100} + \frac{25x}{100} = \frac{125x}{100} = 1,25 \times x$

Exemple : Un stylo vaut 25 € H.T. (Hors taxes). Le taux de la T.V.A. (Taxe) est de 20,6 %.

Quel est son prix T.T.C. (Taxes comprises) ?

1ère méthode : On calcule le montant des taxes, soit 20,6 % de 25 € = $0,206 \times 25 = 5,15$ €, somme que l'on ajoute au prix H.T.

Le prix T.T.C. est donc : $25 + 5,15 = 30,15$ €.

2ème méthode (plus rapide) : On ajoute directement la T.V.A. au prix H.T., soit $1,206 \times 25 = 30,15$ €.

Pour résumer :

Multiplier par 0,75 revient à prendre les 75%, soit faire une réduction de 25%

Multiplier par 1,15 revient à prendre les 115%, soit faire une augmentation de 15%