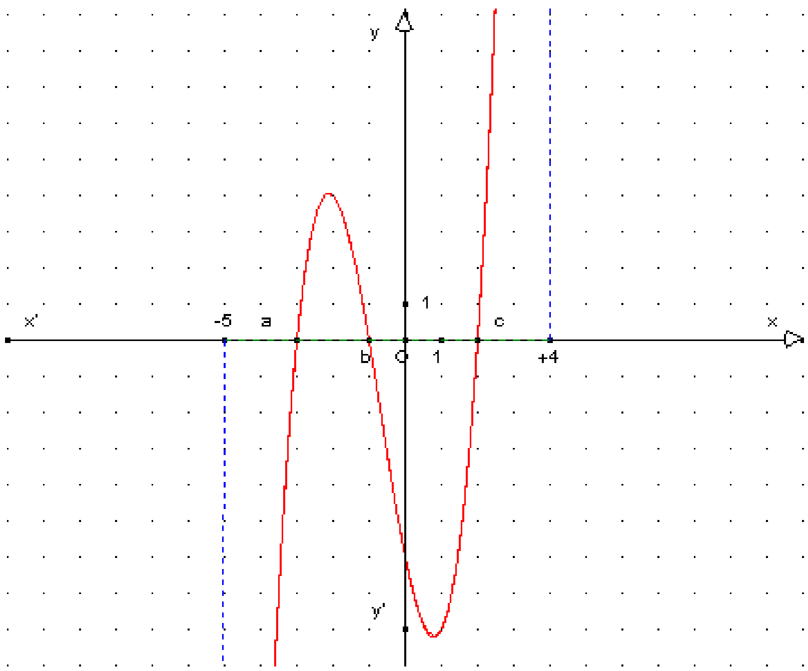
<u>Théorème de la valeur intermédiaire :</u>

> **Si une fonction f est <u>continue</u> sur $[a\,;b]$, toute ordonnée $y \in \left]f(a)\,;f(b)\right[$ est l'image d'au moins un x appartenant à $]a\,;b[$.**

<u>Cas Particulier :</u>

> **Si une fonction f est <u>continue</u> sur $[a\,;b]$, et change de signe sur ce même intervalle, elle admet au moins une racine sur $]a\,;b[$.**
>
> $$\left\{\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a\,,b] \\ \quad\text{et} \\ f(a) \text{ et } f(b) \text{ de signes opposés} \end{array}\right. \text{, alors il existe } \alpha \in]a\,;b[\text{ tel que } f(\alpha) = 0\,.$$



Ainsi, pour la fonction $f : x \to f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, dont le graphe est ci-dessus :

f est continue sur $[-5\,;+4]$, $f(-5) < 0$ et $f(+4) > 0$, donc le *théorème de la valeur intermédiaire* permet d'affirmer l'existence de racines , solutions de $f(x) = 0$ sur $]-5\,;+4[$. (affirmation vérifiée en a , b , c)

Cas particulier : <u>Fonction strictement monotone sur $[a\,;b]$</u>

> Si de plus, f est *strictement monotone* sur $[a\,;b]$, on peut affirmer que la racine α *est <u>unique</u>*.

Recherche dichotomique de racines :

Le principe consiste, pour une racine α que l'on ne peut calculer directement,
à l'encadrer par des intervalles de plus en plus étroits, jusqu'à atteindre la précision désirée.

Pour ce faire, en accord avec le théorème de la valeur intermédiaire,
on choisit systématiquement des intervalles $[a\,;\,b]$ tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés,
condition nécessaire pour affirmer que $\alpha \in\ ]a\,;\,b[$.

Exemple : Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$.

a/ Montrer que *f* est strictement croissante sur [1 ; 2] .

La dérivée de f est : $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$, donc cette dérivée est positive à l'extérieur de ses racines, qui sont -2 et 0 .
$f'(x)$ est positive sur [1 ; 2], et la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

b/ Justifier l'existence d'une racine unique de $f(x) = 0$ sur l'intervalle [1 ; 2] .

f est continue et strictement monotone sur [1 ; 2]. De plus, $f(1) = -1$ et $f(2) = +15$, donc $f(1) \times f(2) < 0$,
(les images sont de signes opposés).

D'après le *théorème de la valeur intermédiaire*, on peut affirmer l'existence d'une solution *unique* $\alpha \in\ ]1\,;\,2[$.

c/ Déterminer une valeur approchée de cette racine à 10^{-1} près.

Le tableau suivant montre qu'à chaque itération, on diminue l'étendue de l'intervalle $[a\,;\,b]$ d'environ sa moitié, en s'assurant de maintenir $f(a) \times f(b) < 0$, ce jusqu'à obtenir une valeur telle que le milieu du dernier intervalle $[a\,;\,b]$ ne puisse s'éloigner de α de plus que 10^{-1} .

a	*b*	*f* (*a*)	*f* (*b*)
1	2	-1	15
1	1,5	-1	5,1
1	1,3	-1	2,26
1	1,2	-1	1,05

On voit que $1 < \alpha < 1,2$, donc en posant $\boldsymbol{\alpha = 1,1}$ on obtient une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

La vraie valeur de α est 1,154.....