Mon sentiment !

La principale difficulté de cette première compo est le temps à y consacrer, à résoudre, puis à rédiger.

Ce sera le gros problème des sujets de bac TS, raison supplémentaire pour que l'élève maîtrise les techniques de calcul du collège, et de 2^{nde}, qu'il n'ait pas à encore perdre du temps à vérifier ses calculs.

L'exercice de TS-Spé Maths est aussi court que facile. C'est un cadeau de Noël avant la date, qui ne doit pas faire trop rêver.

Les autres exercices ne sont pas particulièrement faciles, et risquent d'être très chronophages.

Sachant que votre professeur va distribuer un corrigé écrit, je ne vais pas refaire le corrigé de chaque exercice, comme souvent, mais me limiter à présenter d'autres approches aux esprits curieux.

Exercice 1 :

Soit la suite u telle que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$, pour tout n entier naturel.

Sans conjecturer l'écriture de u_n, ni procéder par récurrence, on va déterminer l'écriture fonctionnelle de la suite u, c'est-à-dire l'écriture de u_n en fonction de n.

$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 2n + 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

L'idée est d'ajouter en colonnes les expressions $u_{p+1} - u_p$, de $u_1 - u_0$ jusqu'à $u_n - u_{n-1}$ (on verra que seuls les termes u_0 et u_n subsisteront).

Au second membre, on verra apparaître la somme connue $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $3 + 3 + 3 + \ldots + 3 = 3n$, formules à adapter à la situation.

$u_n - u_{n-1} = 2(n-1) + 3$,
$u_{n-1} - u_{n-2} = 2(n-2) + 3$,
$u_{n-2} - u_{n-3} = 2(n-3) + 3$,
……………………
u_3 c $u_2 = 2\times2 + 3$,
$u_2 - u_1 = 2\times1 + 3$,
$u_1 - u_0 = 2\times0 + 3$.

$u_n - u_0 = 2[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)] + n\times3$, soit $u_n = 2\times\dfrac{(n-1)n}{2} + 3n = n^2 - n + 3n = n^2 + 2n$.

On conclue : $u_n = n(n+2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Notation symbolique :

$u_{n+1} - u_n + 2n + 3 \Rightarrow \sum\limits_{p=0}^{n-1}(u_{p+1} - u_p) = \sum\limits_{p=0}^{n-1}(2p+3)$, soit $\sum\limits_{p=0}^{n-1} u_{p+1} - \sum\limits_{p=0}^{n-1} u_p = 2\sum\limits_{p=0}^{n-1} p + \sum\limits_{p=0}^{n-1} 3$.

$\sum\limits_{p=1}^{n} u_p - \sum\limits_{p=0}^{n-1} u_p = 2\sum\limits_{p=1}^{n-1} u_p + \sum\limits_{p=1}^{n} 3 \Rightarrow (\sum\limits_{p=1}^{n-1} u_p + u_n) - (u_0 + \sum\limits_{p=1}^{n-1} u_p) + 2\times\dfrac{(n-1)n}{2} + 3n$,

$u_n - u_0 = n^2 - n + 3n \Rightarrow u_n = n^2 + 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

$\boldsymbol{u_0 = \frac{1}{2}}$ **et** $\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}}$ **.**

Sans conjecturer l'écriture de u_n , ni procéder par récurrence, on va déterminer l'écriture fonctionnelle de la suite u , c'est-à-dire l'écriture de u_n en fonction de n .

La formule de récurrence, et le fait que $u_0 = \frac{1}{2}$, prouve que u_n n'est jamais nul.

On peut diviser par u_n : $u_{n+1} = \dfrac{3}{2 + \dfrac{1}{u_n}} \Rightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{3}(2 + \dfrac{1}{u_n})$.

On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$, d'où : $v_{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} v_n$, forme arithmético-géométrique, mélange d'une suite arithmétique, du fait de la forme $\frac{2}{3} + ..$, et géométrique, du fait de la forme $\frac{1}{3} \times ....$.

Dans ce cas de figure, on introduit une suite w telle que $w_n = v_n + a$, où a est une constante à déterminer, pour que la suite w soit géométrique (de raison $q = \frac{1}{3}$) .

$w_{n+1} = v_{n+1} + a = (\frac{2}{3} + \frac{1}{3} v_n) + a = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(w_n - a) + a$, soit $w_{n+1} = \frac{1}{3} w_n + \frac{2 + 2a}{3}$.

Il faut imposer $1 + a = 0$, soit $a = -1$.

La suite w vérifie alors $w_{n+1} = \frac{1}{3} w_n$, géométrique, de raison $q = \frac{1}{3}$, de 1[er] terme $w_0 = v_0 + a = v_0 - 1$.

$w_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = +1$. On déduit $w_n = w_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$v_n = w_n - a = w_n + 1 = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \dfrac{3^n}{3^n + 1}$.

Exercice 4 :

$\boldsymbol{u_0 = 2}$ **et** $\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1}$ **.**

Sans conjecturer l'écriture de u_n , ni procéder par récurrence, on va déterminer l'écriture fonctionnelle de la suite u , c'est-à-dire l'écriture de u_n en fonction de n .

$u_{n+1} - n = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n - n + 1 = \frac{2}{3} u_n - \frac{2}{3} n + 1 = \frac{2}{3}(u_n - n) + 1$.

On constate que : $u_{n+1} - n = \frac{2}{3}(u_n - n) + 1 \Rightarrow u_{n+1} - (n + 1) = \frac{2}{3}(u_n - n)$.

On pose $v_n = u_n - n$, d'où : $v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$.

La suite v est géométrique, de raison $q = \frac{2}{3}$, de 1[er] terme $v_0 = u_0 - 0 = u_0 = 2$.

On déduit : $v_n = v_0 . q^n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$, d'où : $u_n = v_n + n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.