T^{le} S

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES SERIE N°1

Exercice n°1 : Pour tous (5 points)

Partie A : Restitution Organisée de Connaissance

Pré requis *: La suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si tout intervalle du type $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   b. On admet que la suite (n^2) diverge vers $+\infty$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice n°2 : Pour tous (5 points)

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
 	
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme
	Variables :
	v est un réel
	i et n sont des entiers naturels
	
	Début de l'algorithme :
	Lire n
	Pour i variant de 1 à n faire
	v prend la valeur 1
	  Afficher v
	v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
	Fin pour
	Fin algorithme
		Variables :
		v est un réel
		i et n sont des entiers naturels
		
		Début de l'algorithme :
		Lire n
		v prend la valeur 1
		Pour i variant de 1 à n faire
		  Afficher v
		v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
		Fin pour
		Fin algorithme

2. Pour n = 100 on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour n = 100, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.
   La suite (v_n) est-elle monotone ?

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel par $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.

4. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
5. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

Exercice n°3 : Pour ceux qui suivent l'enseignement obligatoire (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

1.
    a. Calculer u_1 et u_2.
    b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
   Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$.
    a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
    b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
    c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$.

Exercice n°3 : Pour ceux qui suivent l'enseignement de spécialité (5 points)

Déterminer les entiers naturels n tels que $\frac{13n - 21}{3n + 4}$ soit un entier.

Exercice n°4 : Pour tous (5 points)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel n, } u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1.
    a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
    b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2.
    a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq n + 3$.
    b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.
    c. En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
    a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
    b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

   Exprimer S_n en fonction de n.