e4554

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n - 1$, pour tout n entier naturel.

1/ Calculer u_1, u_2 et u_3.

2-a) Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, on a : $u_n \geq 0$.

b) En déduire que, pour tout $n \geq 4$, on a : $u_n \geq n - 2$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

3/ On définit la suite (v_n) par la relation $v_n = 4u_n - 8n + 24$, pour tout n entier naturel.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Calculer son premier terme v_0.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

4/ On pose, pour tout entier naturel n : $x_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $y_n = 2n - 6$.

a) Montrer que la suite (x_n) est géométrique et la suite (y_n) arithmétique, et on précisera pour chacune d'elle son premier terme et sa raison.

b) En déduire l'expression de $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

e5069

La suite u est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$, pour tout n entier naturel.

1/ Démontrer que, pour tout n entier naturel, on a $u_n > 0$. En déduire que la suite u est croissante.

2/ Montrer que si la suite u est majorée, alors elle converge vers un nombre négatif.

3/ Montrer que la suite u n'est pas majorée et déterminer sa limite.

Complément :

4/ Soit la suite v telle que, pour tout n entier naturel, $v_n = u_n - a$, où a est un nombre réel.

a) Déterminer a pour que v soit une suite géométrique.

b) Déterminer sa raison q et son premier terme v_0.

c) Exprimer v_n puis u_n, en fonction de n.

d) En déduire la limite des suites v et u.

e5249

La suite (u_n) est définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n - 1$.

1/ A l'aide d'une calculatrice, calculer les vingt premiers termes de la suite (u_n). Quelles conjectures peut-on émettre ?

2/ On note α la limite supposée de la suite (u_n) et on considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \alpha$.

a) Calculer les valeurs exactes des trois premiers termes de la suite (v_n).

b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

c) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

3/ En déduire la limite de la suite (u_n).

4/ (S_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) En déduire la limite de la suite (S_n).

e4645

Les quatre propositions peuvent être examinées indépendamment les unes des autres.

On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$ pour tout entier naturel n .

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Justifier chaque réponse, éventuellement par un contre exemple.

1/ La suite (v_n) est bornée par 0 et 1 .

2/ Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.

3/ Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.

4/ Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

e5332

La suite u est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^{\ 2}} \end{cases}$.

1/ Calculer u_2 , u_3 , u_4 et u_5 .

2/ Conjecturer une expression explicite de u_n , pour $n \geq 1$.

3/ Démontrer la proposition conjecturée.

4/ En déduire la limite de la suite u .

e3658

Sur une droite graduée de repère (O , I) , M_0 et M_1 sont les points d'abscisses respectives 0 et 1 .

On définit une suite de points (M_n) de la façon suivante :

Pour tout entier naturel n , M_{n+2} est le milieu du segment $[M_n\, M_{n+1}]$.

1/ Sur une droite graduée (unité graphique : 10 cm) , placer M_0 , M_1 , M_2 , M_3 , M_4 et M_5 .

2/ Pour tout entier n , x_n désigne l'abscisse du point M_n .

a) Démonter que : $x_{n+2} = \dfrac{1}{2} x_{n+1} + \dfrac{1}{2} x_n$.

b) v est la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $v_n = x_{n+1} - x_n$.

Vérifier que : $x_{n+2} - x_{n+1} = -\dfrac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)$. En déduire la nature de la suite v .

c) w est la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $w_n = x_{n+1} + \dfrac{1}{2} x_n$.

Démontrer que la suite w est constante, c'est à dire que $w_{n+1} = w_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Calculer w_0 .

d) Vérifier que $w_n - v_n = \dfrac{3}{2} x_n$, et en déduire que , pour tout n de $\mathbb{N}$: $x_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

e) En déduire que la suite x est convergente.

e5226

Soit la suite u définie, pour tout n entier naturel non nul, par : $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1} \times \left(\dfrac{n+3}{4}\right)$.

1-a) Vérifier que pour tout n non nul : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3}{4}\left(1 + \dfrac{1}{n+3}\right)$.

b) En déduire que la suite u est convergente.

2/ Utiliser la limite éventuelle de la suite v telle que $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, pour déterminer celle de la suite u .

e5227

Soit la suite u définie par $u_0 = 2$, et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,2}}{u_n - 1}$.

a) Démontrer que la suite u est minorée par 2 .

b) Déterminer le sens de variation de la suite u .

c) Démontrer que la suite u ne peut converger vers aucun nombre réel L .

d) Démontrer que u ne peut être majorée. En déduire la limite de la suite u .

e5176

Soit la suite u définie par u_0 et u_1 de valeurs connues, et pour tout entier naturel n , par $u_{n+2} = \dfrac{5}{3}u_{n+1} - \dfrac{4}{9}u_n$.

a) Démontrer par récurrence que $u_n = \dfrac{4u_0 - 3u_1}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3u_1 - u_0}{3} \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ pour tout entier naturel n .

b) Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

e5186

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Soit la fonction f définie sur $[-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

1/ Montrer que f est strictement croissante.

2/ Soit a la solution de l'équation $f(x) = x$. Montrer que, pour tout réel $x \in [1\,;a]$, alors $f(x) \in [1\,;a]$.

3/ En déduire, en raisonnant par récurrence, que pour tout entier n : $1 \le u_n \le a$ et $u_n \le u_{n+1}$.

4/ En déduire que la suite u est convergente, et déterminer sa limite L .