Définition – Forme trigonométrique – Lien avec la forme algébrique

Coordonnées *Cartésiennes* : $z = a + ib$ **noté** $z\,(a\,;b)$, a et b réels

Coordonnées *Polaires* : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ **noté** $z\,[r\,;\theta]$, $r \geq 0$ et $\theta \in [0\,;2\pi[$. $r = |z|$ module - θ argument de z

Relation entre forme cartésienne et forme polaire

$$z\,(a\,;b) = a + ib \Leftrightarrow r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \mathrm{OM} \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases} \Leftrightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = z[r\,;\theta]\,.$$

$$z = [r\,;\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} a = r.\cos\theta \\ b = r.\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow z = a + ib = (a\,;b)$$

Exemples

$$z = \sqrt{3} - i \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow r = \sqrt{a^2+b^2} = 2 \text{ et } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}\,(2\pi) \text{ d'où } z = 2[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})] = [2\,;-\frac{\pi}{6}]\,,$$

Inversement : $z = [\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}] = \sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})] = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) \Leftrightarrow z = 1 - i = (1\,;-1)$

Opérations – Forme polaire (trigonométrique) peu utilisable en addition, efficace pour produit, division et puissance

$z_1 = [r_1\,;\theta_1]$, $z_2 = [r_2\,;\theta_2] \Rightarrow z_1 \times z_2 = [r_1 \times r_2\,;\theta_1 + \theta_2]$ et $\dfrac{z_1}{z_2} = [\dfrac{r_1}{r_2}\,;\theta_1 - \theta_2]$: $z = [r\,;\theta] \Rightarrow z^n = [r^n\,;n.\theta]$ pour $\in \mathbb{N}$.

$z = 1 + i = (1\,;1) \Rightarrow z = [\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{4}]$ d'où $z^7 = [\,8\sqrt{2}\,;\frac{7\pi}{4}\,] = 8\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})] = 8\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 8 - 8i$

Notation d'Euler – Forme exponentielle

$z = [r\,;\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r.e^{i\theta}$, avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0\,;2\pi[$: $z \times z' = r.r'e^{i(\theta+\theta')}$, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$, $z^n = r^n.e^{ni\theta}$

Vidéos **Maths et Tiques (Yvan MONKA)** : **Cours PDF1** **PDF2** **PDF3** **Cours Vidéo** **Module** **Argument** **Alg_Trigo** **Alg.Expo**

Exercices **JMedu** **Enoncés** **e5525** **e4355** **e0122** **e1610** **e3449** **Corrigés** **s5525** **s4355** **s0122** **s1610** **s3449**